Robotique
Manipulation et commande

Université de Strasbourg

Telecom Physique Strasbourg, option ISAV

Master IRIV, parcours AR

Chapitre 4 – Modélisation dynamique

Plan du chapitre

- 1. Introduction
- 2. Equations d'Euler-Lagrange
- 3. Méthode de Newton-Euler

1. Introduction

- **Modélisation dynamique**
  - Système de n équations différentielles d'ordre 2 reliant les dérivées première et seconde des n coordonnées articulaires par rapport au temps aux n efforts articulaires.
  - Cette modélisation permet de synthétiser la loi de commande en position du robot.
  - 2 façons d'obtenir les équations :
    - Méthode d'Euler-Lagrange
    - Méthode de Newton-Euler

2. Equations d'Euler-Lagrange
2.1. Cas général

- Soit l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

Avec :

$L = K - V$	Lagrangien du système
K	Energie cinétique du système
V	Energie potentielle du système
q_i	$i^{ème}$ coordonnée généralisée du système
τ_i	Force généralisée appliquée au $i^{ème}$ élément

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.2. Application à la robotique

- Coordonnées généralisées :
  - Variables articulaires q_i
- Forces généralisées :
  - Couple moteur si axe rotoïde
  - Force moteur si axe prismatique
- Energie cinétique :

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_i + \frac{1}{2} \omega^T{}_i \boldsymbol{I}_i \omega_i \right)$$

Avec :

$\boldsymbol{I}_i$	Tenseur d'inertie du corps i	$\boldsymbol{v}_i$	Vitesse linéaire du corps i
m_i	Masse du corps i	ω_i	Vitesse angulaire du corps i

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.2. Application à la robotique

- Tenseur d'inertie :
  - Soit S un solide et dm un élément de masse
  - On a :

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm & -\int_S xy\, dm & -\int_S xz\, dm \\ -\int_S xy\, dm & \int_S \left(x^2 + z^2\right) dm & -\int_S yz\, dm \\ -\int_S xz\, dm & -\int_S yz\, dm & \int_S \left(x^2 + y^2\right) dm \end{bmatrix}$$

  - Cette matrice est constante si elle est calculée dans un repère lié au solide.
  - Les éléments hors diagonale sont nuls si le solide est symétrique par rapport aux axes du repère.

2. Equations d'Euler-Lagrange
2.2. Application à la robotique

- Calcul de l'énergie cinétique :
  - Soient J_{vi} et $J_{\omega i}$ deux Jacobiens tels que :

$${}^0\boldsymbol{v}_i = J_{vi}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \quad \text{et} \quad {}^i\boldsymbol{\omega}_i = R_{0i}^T J_{\omega i}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

  - Avec :

${}^0\boldsymbol{v}_i$	Vitesse du CDG du corps i exprimée dans R_0
${}^i\boldsymbol{\omega}_i$	Vitesse angulaire du corps i exprimée dans R_i

  - Alors :

$$K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(m_i J_{vi}^T(\boldsymbol{q}) J_{vi}(\boldsymbol{q}) + J_{\omega i}^T(\boldsymbol{q}) R_{0i} \boldsymbol{I}_i R_{0i}^T J_{\omega i}(\boldsymbol{q})\right)\right]}_{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})}\dot{\boldsymbol{q}}$$

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})$ est symétrique définie positive de dimension $n \times n$.

Elle dépend uniquement de la configuration $\boldsymbol{q}$ du robot.

C'est la matrice d'inertie du robot.

2. Equations d'Euler-Lagrange
2.2. Application à la robotique

- Energie potentielle :
  - Sur un robot, la principale source d'énergie potentielle est la gravité.
  - Sur certains robots, l'effet de la gravité est compensé par des ressorts. Le terme V peut donc être négligé.
  - Soit ${}^0\mathbf{g}$, le vecteur d'accélération de la pesanteur exprimé dans le repère de base. On a donc :

$$V = -{}^0\mathbf{g}^T \sum_{i=1}^{n} {}^0O_{gi} m_i$$

${}^0O_{gi}$	Coordonnées du CDG du corps i exprimées dans R_0
m_i	Masse du corps i

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.2. Application des équations d'Euler-Lagrange

- K peut se mettre sous la forme :

$$K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T D(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1,j=1}^{n} d_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$$

Avec d_{ij} les termes de la matrice $D(\boldsymbol{q})$

- V ne dépend que de la configuration $\boldsymbol{q}$: $V=V(\boldsymbol{q})$. Le Lagrangien L s'écrit donc :

$$L = K - V = \frac{1}{2}\sum_{i=1,j=1}^{n}\left(d_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j\right) - V(\boldsymbol{q})$$

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.2. Application des équations d'Euler-Lagrange

- On a : $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}(\boldsymbol{q})\dot{q}_j$$
- Et donc :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt}\left\{d_{kj}(\boldsymbol{q})\right\}\dot{q}_j$$

$$= \sum_j d_{kj}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial d_{kj}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{q}_i\right\}\dot{q}_j$$

- De même :

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial d_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j\right) - \frac{\partial V(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}$$

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.2. Application des équations d'Euler-Lagrange

- Ainsi les équations deviennent :

$$\sum_j \left\{ d_{kj}\ddot{q}_j \right\} + \sum_{i,j} \left\{ \left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \right\} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = \tau_k \qquad k = 1, \ldots, n$$

- Forme équivalente matricielle :

$$\boxed{\underbrace{D(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}}_{\substack{\text{Effets} \\ \text{inertiels}}} + \underbrace{C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}}_{\substack{\text{Effets coriolis} \\ \text{et centrifuge}}} + \underbrace{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})}_{\substack{\text{Effets dûs} \\ \text{à la gravité}}} = \tau}$$

2. Equations d'Euler-Lagrange
2.2. Application des équations d'Euler-Lagrange

- **Avec :**

D : Matrice $n \times n$ des termes d_{ij}

C : $n \times n$ termes $C_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ c_{ijk} \dot{q}_i \right\}$

$$\mathbf{g} : \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial V}{\partial q_n} \end{bmatrix}^T$$

$$\tau : \begin{bmatrix} \tau_1 & \cdots & \tau_n \end{bmatrix}^T$$

- **Remarque**

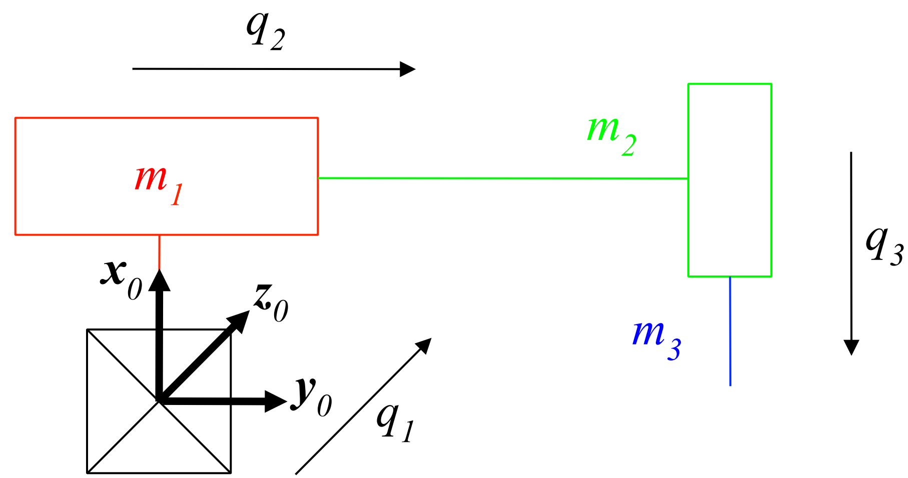
Dans $\mathrm{C}(q,\dot{q})\dot{q}$ les termes en $\dot{q}_i^2$ sont centrifuges,

ceux en $q_i q_j$ avec $i \neq j$ sont les termes de Coriolis.

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.3. Exemple 1 : robot Cartésien

Soient v_1 v_2 v_3 les vitesses des CDG des 3 corps du robot.



- On a :
- Avec :

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.3. Exemple 1 : robot Cartésien

- Energie cinétique de translation :
- On en déduit :

2. Equations d'Euler-Lagrange

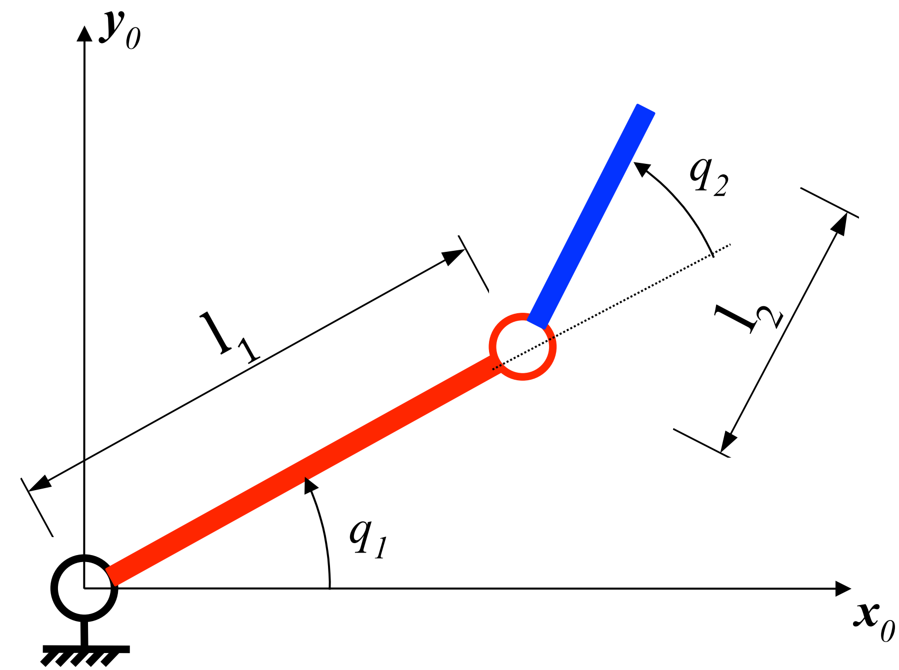
2.3. Exemple 1 : robot Cartésien

- Energie potentielle :
  - Seul l'axe 3 subit la gravité.
  - D'où :
- Equations d'Euler-Lagrange :
  - D ne dépend pas de $\boldsymbol{q}$ donc les c_{ijk} sont nuls.
  - De plus :
  - On obtient donc :

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

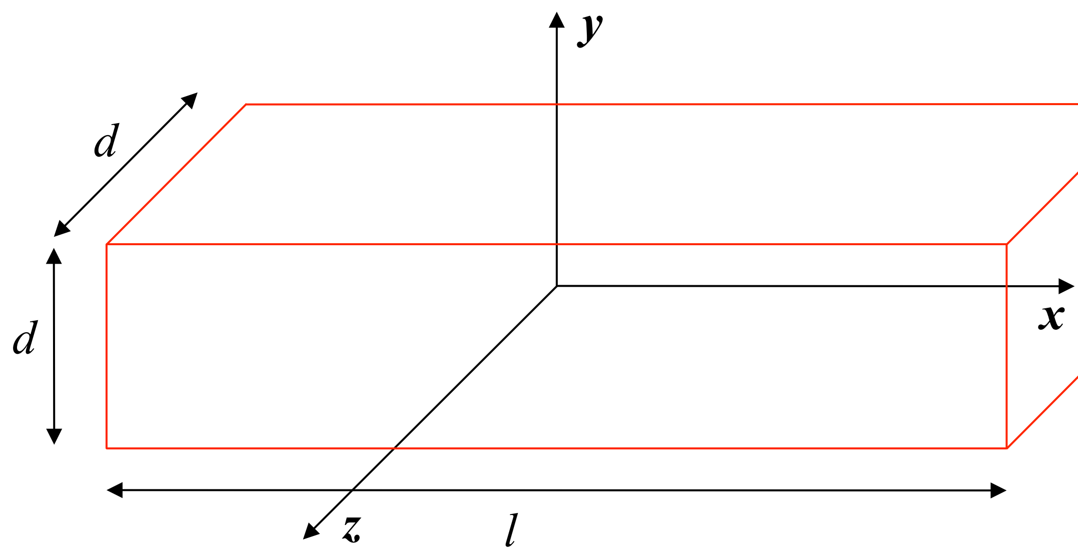
- Soit le robot plan de caractéristiques :
  - Corps parallélépipédiques de section dxd.
  - Masse volumique du matériau : ρ
  - m_1 et m_2 les masses des corps 1 et 2.



2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- Calcul des tenseurs d'inertie :



$$I = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)\,dm & -\int_S xy\,dm & -\int_S xz\,dm \\ -\int_S xy\,dm & \int_S (x^2+z^2)\,dm & -\int_S yz\,dm \\ -\int_S xz\,dm & -\int_S yz\,dm & \int_S (x^2+y^2)\,dm \end{bmatrix}$$

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- On a :
- Et :

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- On en déduit :

- D'où :

2. Equations d'Euler-Lagrange
2.4. Exemple 2 : robot plan

- Energie cinétique :

$$K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \left[\sum_{i=1}^{n} \left(m_i J_{vi}^T(\boldsymbol{q}) J_{vi}(\boldsymbol{q}) + J_{\omega i}^T(\boldsymbol{q}) R_{0i} \boldsymbol{I}_i R_{0i}^T J_{\omega i}(\boldsymbol{q}) \right) \right] \dot{\boldsymbol{q}}$$

  - Contribution de la translation : trouver les J_{vi}
    - De manière évidente :

2. Equations d'Euler-Lagrange
2.4. Exemple 2 : robot plan

- Les coordonnées x_2 et y_2 du CDG du corps 2 exprimées dans le repère de base sont :

- On en déduit que :

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- Contribution de la rotation :
  - Les vitesse de rotation doivent être exprimées dans le même repère où ont été exprimées les tenseurs d'inertie.
  - Ce repère a pour origine le CDG du corps et a ses axes parallèles à ceux du repère de DH associé au corps.
  - Comme les axes z sont parallèles :
  - D'où :

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- De même :

- Si on note :

$$i_1 = m_1 \frac{d^2 + l_1^2}{12} \quad \text{et} \quad i_2 = m_2 \frac{d^2 + l_2^2}{12}$$

- Alors l'énergie cinétique provenant de la rotation devient :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T \begin{bmatrix} i_1 + i_2 & i_2 \\ i_2 & i_2 \end{bmatrix} \dot{q}$$

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- On en déduit la matrice d'inertie du robot :

$$D(\boldsymbol{q}) = m_1 J_{v1}^T J_{v1} + m_2 J_{v2}^T J_{v2} + \begin{bmatrix} i_1 + i_2 & i_2 \\ i_2 & i_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 \dfrac{l_1^2}{4} + m_2 \left(l_1^2 + \dfrac{l_2^2}{4} + l_1 l_2 \cos q_2 \right) + i_1 + i_2 & m_2 \left(\dfrac{l_2^2}{4} + \dfrac{l_1 l_2}{2} \cos q_2 \right) + i_2 \\ m_2 \left(\dfrac{l_2^2}{4} + \dfrac{l_1 l_2}{2} \cos q_2 \right) + i_2 & m_2 \dfrac{l_2^2}{4} + i_2 \end{bmatrix}$$

- Et les termes c_{ijk} :

$$c_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} = 0 \quad c_{121} = c_{211} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 = h$$

$$c_{221} = h \quad c_{112} = -h \quad c_{122} = c_{212} = 0 \quad c_{222} = 0$$

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- Energie potentielle : $V=V_1+V_2$

$$V_1 = m_1 g \frac{l_1}{2} \sin q_1 \quad V_2 = m_2 g \left(l_1 \sin q_1 + \frac{l_2}{2} \sin\left(q_1+q_2\right) \right)$$

- D'où :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \left(m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 l_1 \right) g \cos q_1 + m_2 \frac{l_2}{2} g \cos\left(q_1+q_2\right) = \Phi_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 g \frac{l_2}{2} \cos\left(q_1+q_2\right) = \Phi_2$$

2. Equations d'Euler-Lagrange

2.4. Exemple 2 : robot plan

- On en déduit les équations dynamiques :

$$\begin{cases} d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{211}\dot{q}_2\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2^2 + \Phi_1 = \tau_1 \\ d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + c_{112}\dot{q}_1^2 + \Phi_2 = \tau_2 \end{cases}$$

- La matrice C vaut :

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$