

Commande par vision

CHAPITRE 2 – ESTIMATION DE LA MESURE

JACQUES.GANGLOFF@UNISTRA.FR

Plan

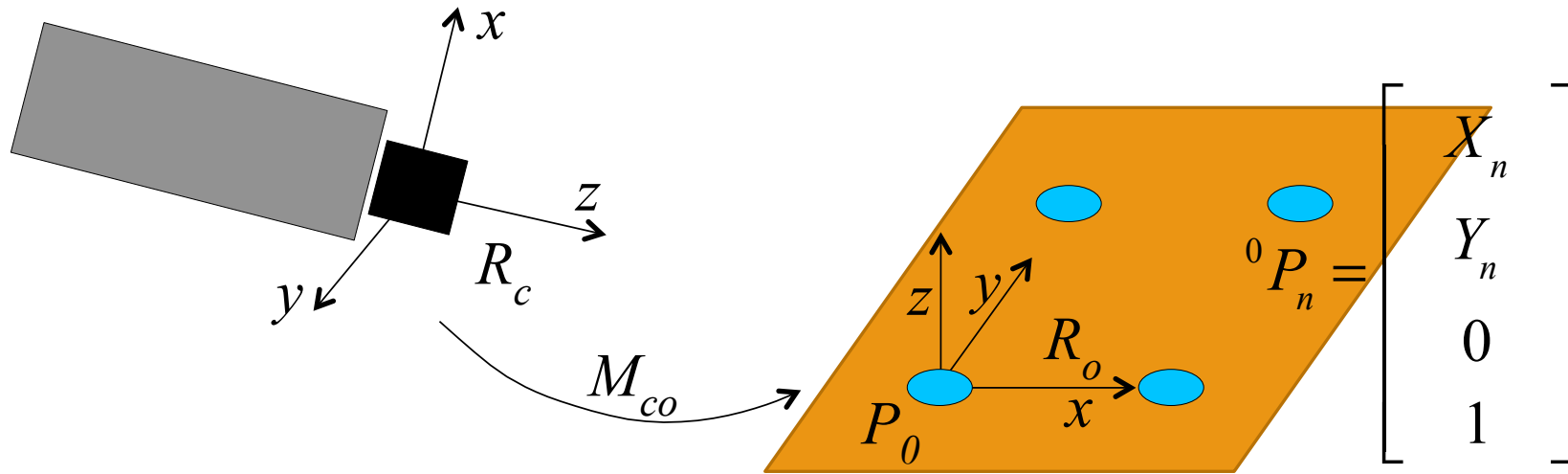
Estimation de la mesure :

- Avec 4 points coplanaires
- Avec au moins 4 points non coplanaires
- Avec le Jacobien image
- Avec projection de marqueurs
- Utilisation d'OpenCV

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

Soit la configuration suivante:



La cible est constituée de 4 points P_0, P_1, P_2, P_3 coplanaires dans $(P_0 \ x \ y)$ où P_0 est l'origine de R_o . Trouver M_{co} , la matrice homogène de transformation entre R_c et R_o .

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

Soit le modèle d'une projection perspective:

$${}^z_n {}^c p_n = K \Pi M_{co} {}^o P_n \text{ avec } {}^c p_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^o P_n = \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} G_x & 0 & u_0 \\ 0 & G_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

Si :

$$M_{co} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors, en considérant pour simplifier que $u_0 = v_0 = 0$:

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

On obtient :

En divisant tout par t_z :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{(\theta_1 X_n + \theta_2 Y_n + \theta_3)}{\theta_7 X_n + \theta_8 Y_n + 1} \\ y_n = \frac{(\theta_4 X_n + \theta_5 Y_n + \theta_6)}{\theta_7 X_n + \theta_8 Y_n + 1} \end{array} \right.$$

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

Avec :

$$\theta_1 = \frac{r_{11} G_x}{t_z} \quad \theta_2 = \frac{r_{12} G_x}{t_z} \quad \theta_3 = \frac{t_x G_x}{t_z} \quad \dots \quad \theta_8 = \frac{r_{32}}{t_z}$$

Notes :

- G_x et G_y sont les grossissements suivant x et y du capteur.
- Ils dépendent de la taille du pixel.
- Ils sont égaux lorsque le pixel est carré.
- Ils permettent d'obtenir une coordonnée dans l'image en pixels.
- On a :

$$G_x = \frac{f}{l_x} \quad \text{et} \quad G_y = \frac{f}{l_y} \quad \text{avec } f \text{ la focale et } l_x \times l_y \text{ la taille d'un pixel.}$$

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

Il vient :

$$\begin{cases} x_n (\theta_7 X_n + \theta_8 Y_n + 1) = (\theta_1 X_n + \theta_2 Y_n + \theta_3) \\ y_n (\theta_7 X_n + \theta_8 Y_n + 1) = (\theta_4 X_n + \theta_5 Y_n + \theta_6) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_n = (\theta_1 X_n + \theta_2 Y_n + \theta_3) - x_n (\theta_7 X_n + \theta_8 Y_n) \\ y_n = (\theta_4 X_n + \theta_5 Y_n + \theta_6) - y_n (\theta_7 X_n + \theta_8 Y_n) \end{cases}$$

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

Sous forme matricielle :

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

En appliquant cette équation aux 4 points :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}}_{M_{8 \times 8}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_8 \end{bmatrix}}_{\Theta} \quad \text{d'où : } \Theta = M^{-1} B$$

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

En utilisant le fait que $r_{1l}^2 + r_{2l}^2 + r_{3l}^2 = 1$:

$$\left(\frac{\theta_1 t_z}{G_x}\right)^2 + \left(\frac{\theta_4 t_z}{G_y}\right)^2 + (\theta_7 t_z)^2 = 1$$

$$\Rightarrow t_z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\theta_1}{G_x}\right)^2 + \left(\frac{\theta_4}{G_y}\right)^2 + \theta_7^2}} \text{ car } t_z > 0$$

On en déduit tous les termes de M_{co} .

Estimation de pose

A partir de 4 points coplanaires

Conclusions :

- Méthode simple exploitant les propriétés de planéité de la cible.
- Le calcul implique l'inversion d'une matrice 8×8 .
- Le calcul se fait en un nombre d'opérations fixe.
- Cette méthode est sensible au bruit : il n'y a aucune garantie que la matrice de rotation estimée respecte les propriétés d'orthonormalité.
- Potentiellement, il faudrait normaliser cette matrice et rendre ses lignes/colonnes perpendiculaires 2 à 2.

Estimation de pose

A partir d'au moins 4 points non coplanaires : POSIT

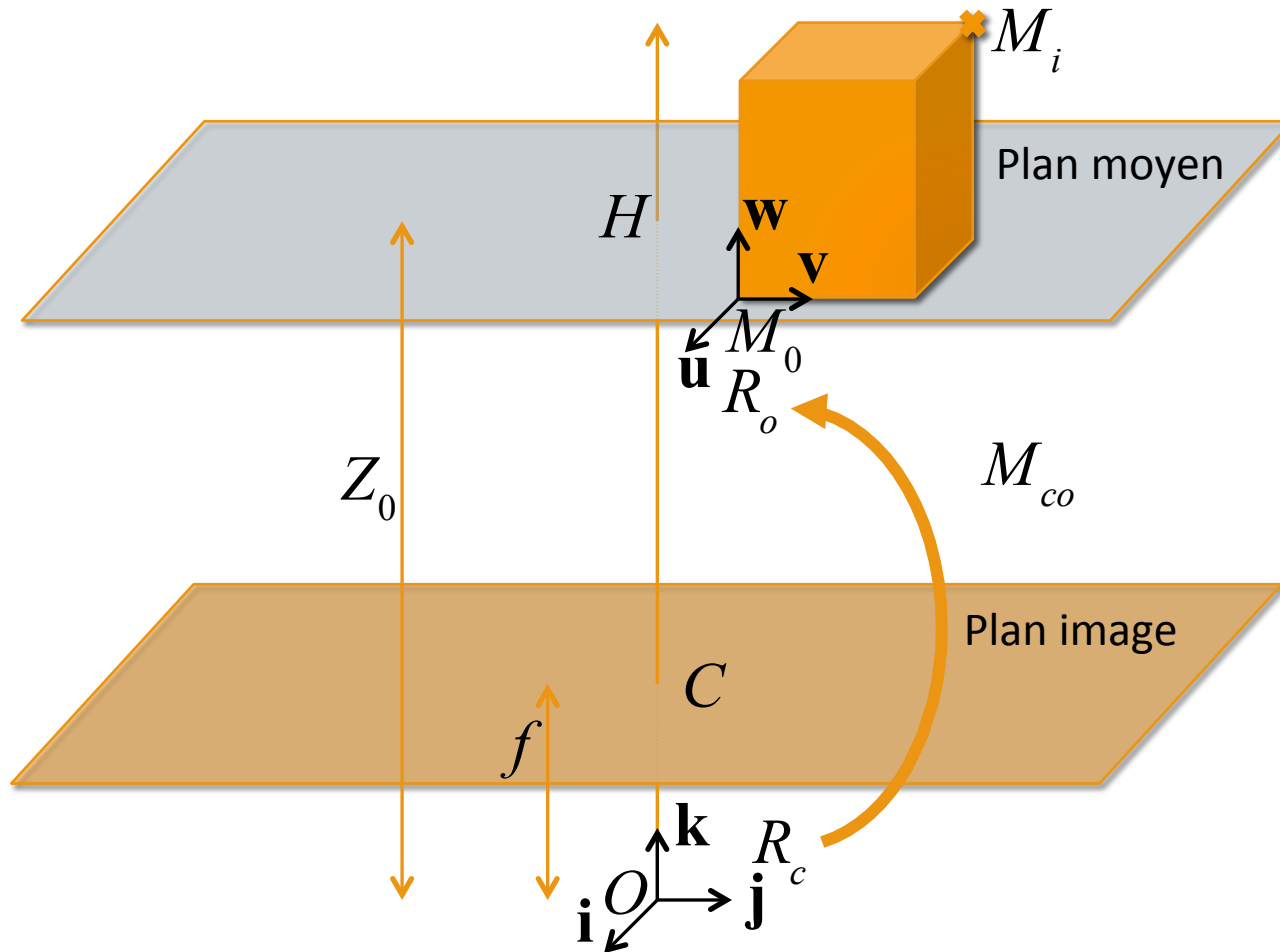
Référence bibliographique :

D. DeMenthon et L. S. Davis, Model-Based Object Pose in 25 Lines of Code, *International Journal of Computer Vision*, volume 15, pages 123 à 141, 1995.

Méthode itérative, basée sur l'approximation de projection orthographique.

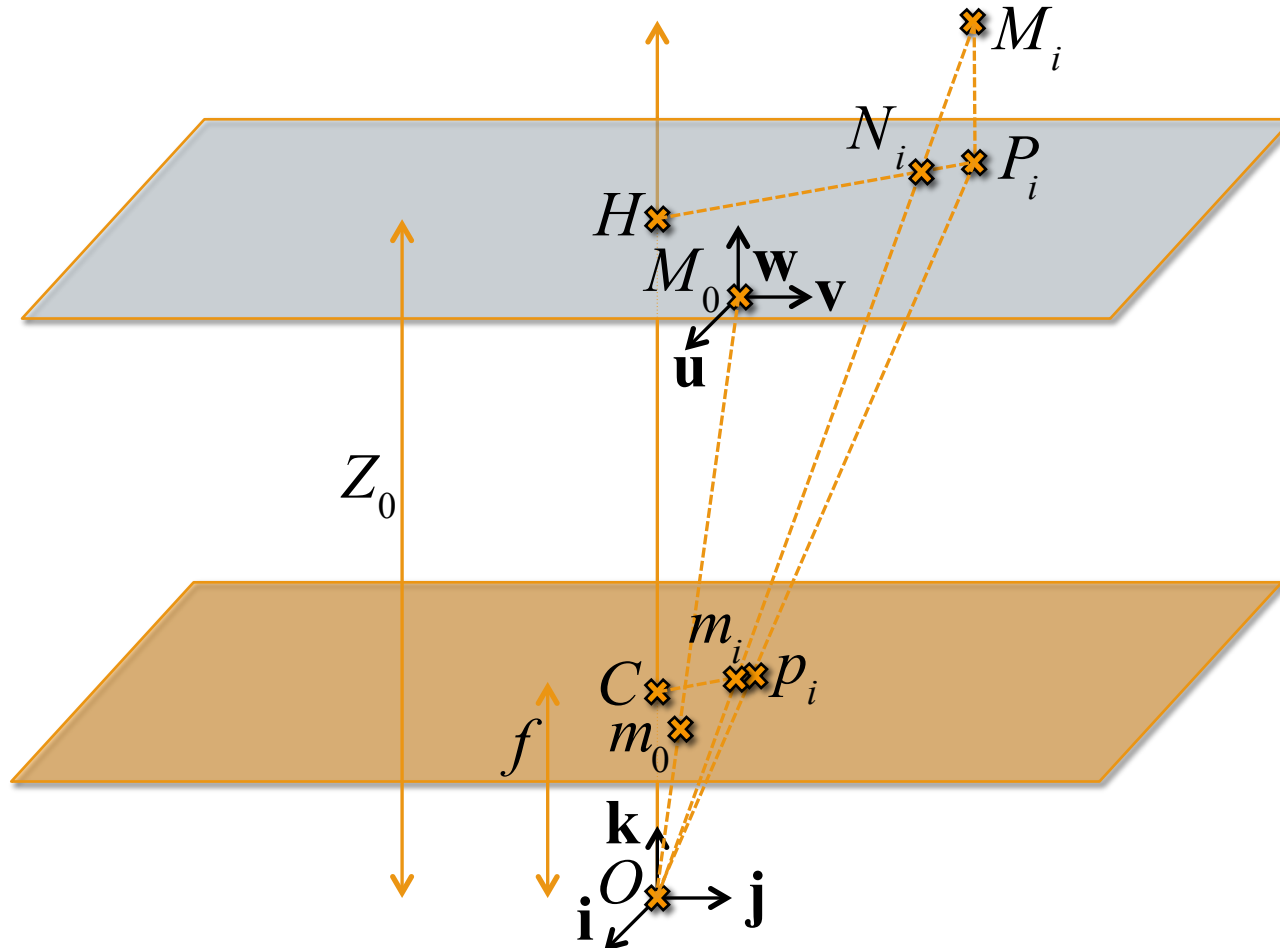
Estimation de pose

POSIT : définitions



Estimation de pose

POSIT : définitions



Estimation de pose

POSIT : objectifs

Soit :

$$M_{co} = \left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{{}^o \mathbf{i}_u \quad {}^o \mathbf{i}_v \quad {}^o \mathbf{i}_w}_{\text{Coord. de } \mathbf{i} \text{ dans repère objet}} & T_x = \frac{x_0 Z_0}{f} & & \\ \underbrace{{}^o \mathbf{j}_u \quad {}^o \mathbf{j}_v \quad {}^o \mathbf{j}_w}_{\text{Coord. de } \mathbf{j} \text{ dans repère objet}} & T_y = \frac{y_0 Z_0}{f} & & \\ \underbrace{{}^o \mathbf{k}_u \quad {}^o \mathbf{k}_v \quad {}^o \mathbf{k}_w}_{{}^o \mathbf{k} = {}^o \mathbf{i} \times {}^o \mathbf{j}} & T_z = Z_0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{avec : } {}^c m_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Estimation de pose

POSIT : calculs

Pour déterminer M_{c0} il suffit de :

- Déterminer les coordonnées dans R_0 de \mathbf{i} et \mathbf{j}
- Déterminer la profondeur Z_0 le long de l'axe optique du plan moyen.

Démontrer les relations suivantes :

$$\overrightarrow{M_0 M_i} \cdot \frac{f}{Z_0} \mathbf{i} = x_i(1 + \varepsilon_i) - x_0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{M_0 M_i} \cdot \frac{f}{Z_0} \mathbf{j} = y_i(1 + \varepsilon_i) - y_0 \quad (2)$$

$$\text{avec } {}^c m_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & f \end{bmatrix}^T \text{ et } \varepsilon_i = \frac{1}{Z_0} \overrightarrow{M_0 M_i} \cdot \mathbf{k}$$

Estimation de pose

POSIT : calculs

On a :

Avec :

Les triangles $C m_i O$ et $N_i P_i M_i$ sont semblables dans le rapport entre $M_i P_i$ et $C O$. Ce rapport est égale à :

Estimation de pose

POSIT : calculs

On obtient :

Produit scalaire par \mathbf{i} :

On obtient l'équation (1) :

$$\overrightarrow{M_0 M_i} \cdot \frac{f}{Z_0} \mathbf{i} = x_i (1 + \varepsilon_i) - x_0 \text{ avec } \varepsilon_i = \frac{1}{Z_0} \overrightarrow{M_0 M_i} \cdot \mathbf{k}$$

Le produit scalaire par \mathbf{j} donne l'équation (2).

Estimation de pose

POSIT : calculs

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire dans R_o :

$${}^o(M_0 M_i)^T {}^o\mathbf{I} = \zeta_i \text{ avec } {}^o\mathbf{I} = \frac{f}{Z_0} {}^o\mathbf{i} \text{ et } \zeta_i = x_i(1 + \varepsilon_i) - x_0$$

$${}^o(M_0 M_i)^T {}^o\mathbf{J} = \eta_i \text{ avec } {}^o\mathbf{J} = \frac{f}{Z_0} {}^o\mathbf{j} \text{ et } \eta_i = y_i(1 + \varepsilon_i) - y_0$$

Sous forme matricielle pour tous les n points M_i :

$$\begin{cases} A {}^o\mathbf{I} = \mathbf{x}' \\ A {}^o\mathbf{J} = \mathbf{y}' \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} {}^o(M_0 M_1)^T \\ \vdots \\ {}^o(M_0 M_n)^T \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

Avec :

Estimation de pose

POSIT : calculs

Si on a au moins 4 points, la matrice A est de dimension 3×3 et est inversible. Si $n > 3$ on utilise la pseudo-inverse :

$$\begin{cases} {}^o\mathbf{I} = B\mathbf{x}' \\ {}^o\mathbf{J} = B\mathbf{y}' \end{cases} \text{ avec } B = \left(A^T A \right)^{-1} A^T$$

$$\text{Et on en déduit : } {}^o\mathbf{i} = \frac{{}^o\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|} \quad {}^o\mathbf{j} = \frac{{}^o\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|} \quad {}^o\mathbf{k} = {}^o\mathbf{i} \times {}^o\mathbf{j}$$

Et finalement :

$$T_z = Z_0 = \frac{2f}{\|\mathbf{I}\| + \|\mathbf{J}\|} \quad T_x = x_0 \frac{Z_0}{f} \quad T_y = y_0 \frac{Z_0}{f}$$

Estimation de pose

POSIT : algorithme

Initialisation

n nombre de points, A de dimension $3 \times (n-1)$

Calcul de B , pseudo-inverse de A . $\varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

Calcul de la pose

Evaluation de \mathbf{x}' et \mathbf{y}' . ${}^o\mathbf{I} = B\mathbf{x}' \quad {}^o\mathbf{J} = B\mathbf{y}'$

$${}^o\mathbf{i} = \frac{{}^o\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|} \quad {}^o\mathbf{j} = \frac{{}^o\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|} \quad {}^o\mathbf{k} = {}^o\mathbf{i} \times {}^o\mathbf{j}$$

$$T_z = Z_0 = 2f \left(\|\mathbf{I}\| + \|\mathbf{J}\| \right)^{-1} \quad T_x = x_0 \frac{Z_0}{f} \quad T_y = y_0 \frac{Z_0}{f}$$

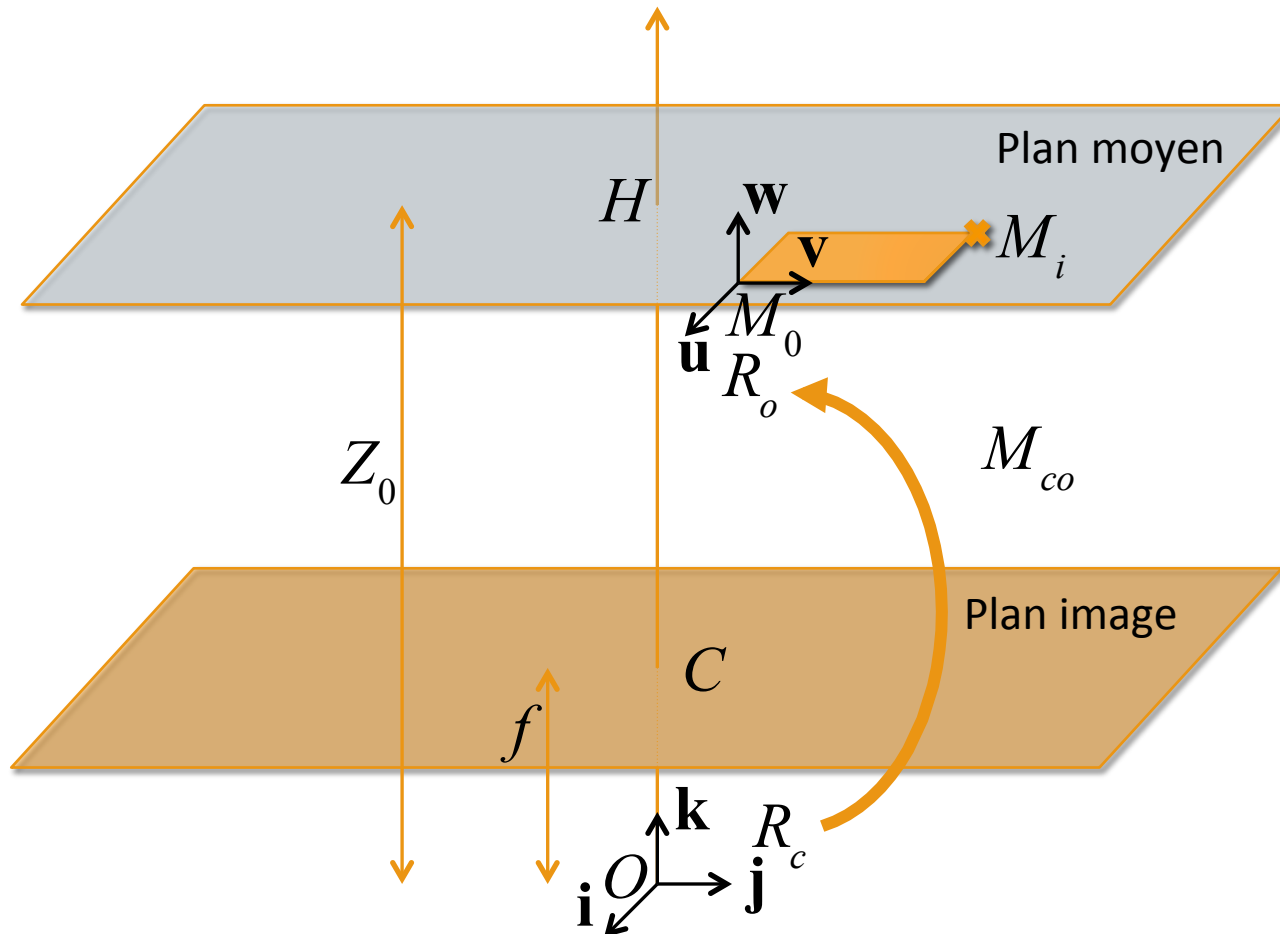
Mise à jour des ε_i

$$\varepsilon_i = \frac{1}{Z_0} \overrightarrow{M_0 M_i} \cdot \mathbf{k} \quad \forall i = 1 \dots n$$

Arrêt si tous les ε_i sont sous un certain seuil.

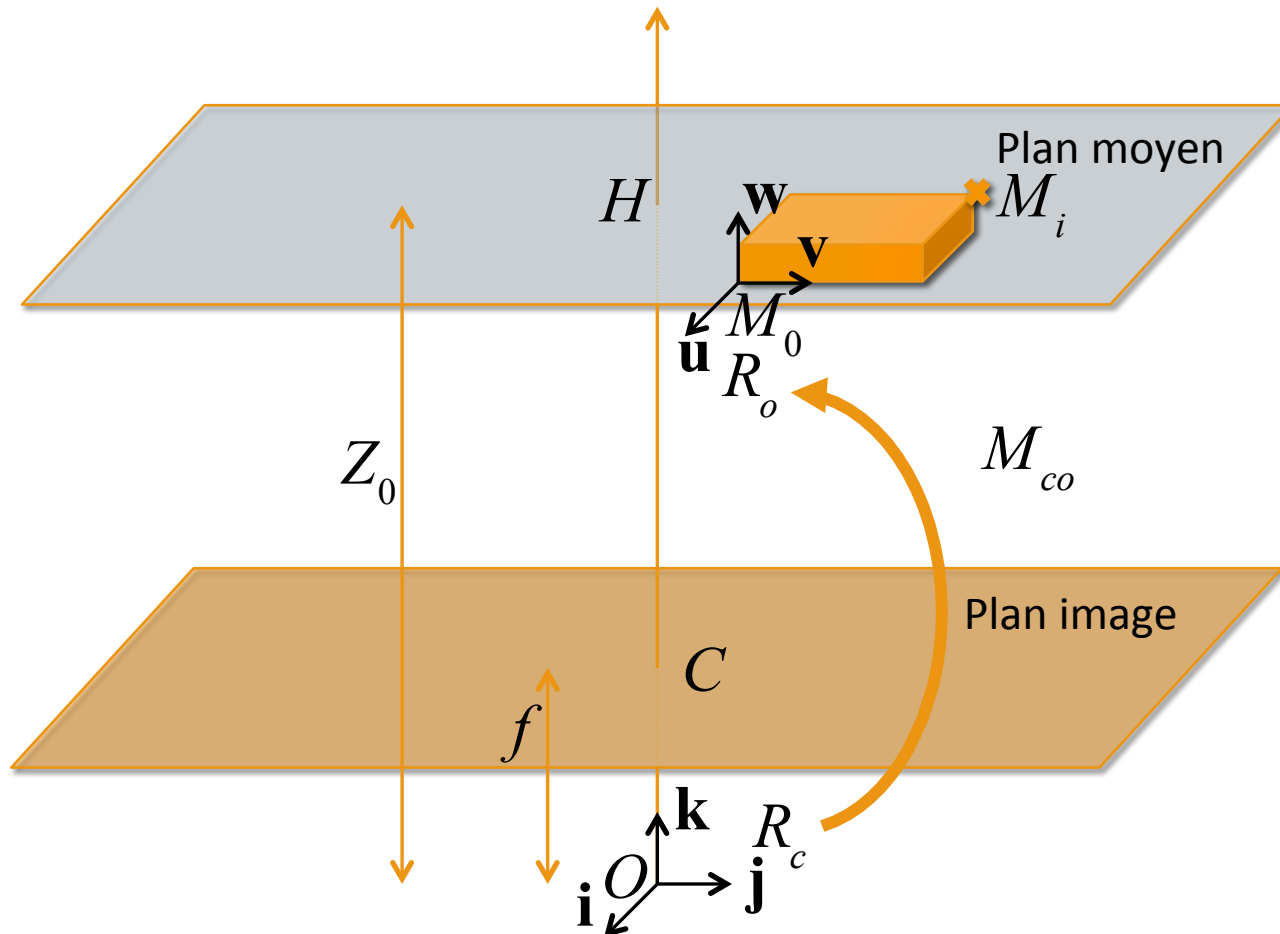
Estimation de pose

POSIT : algorithme



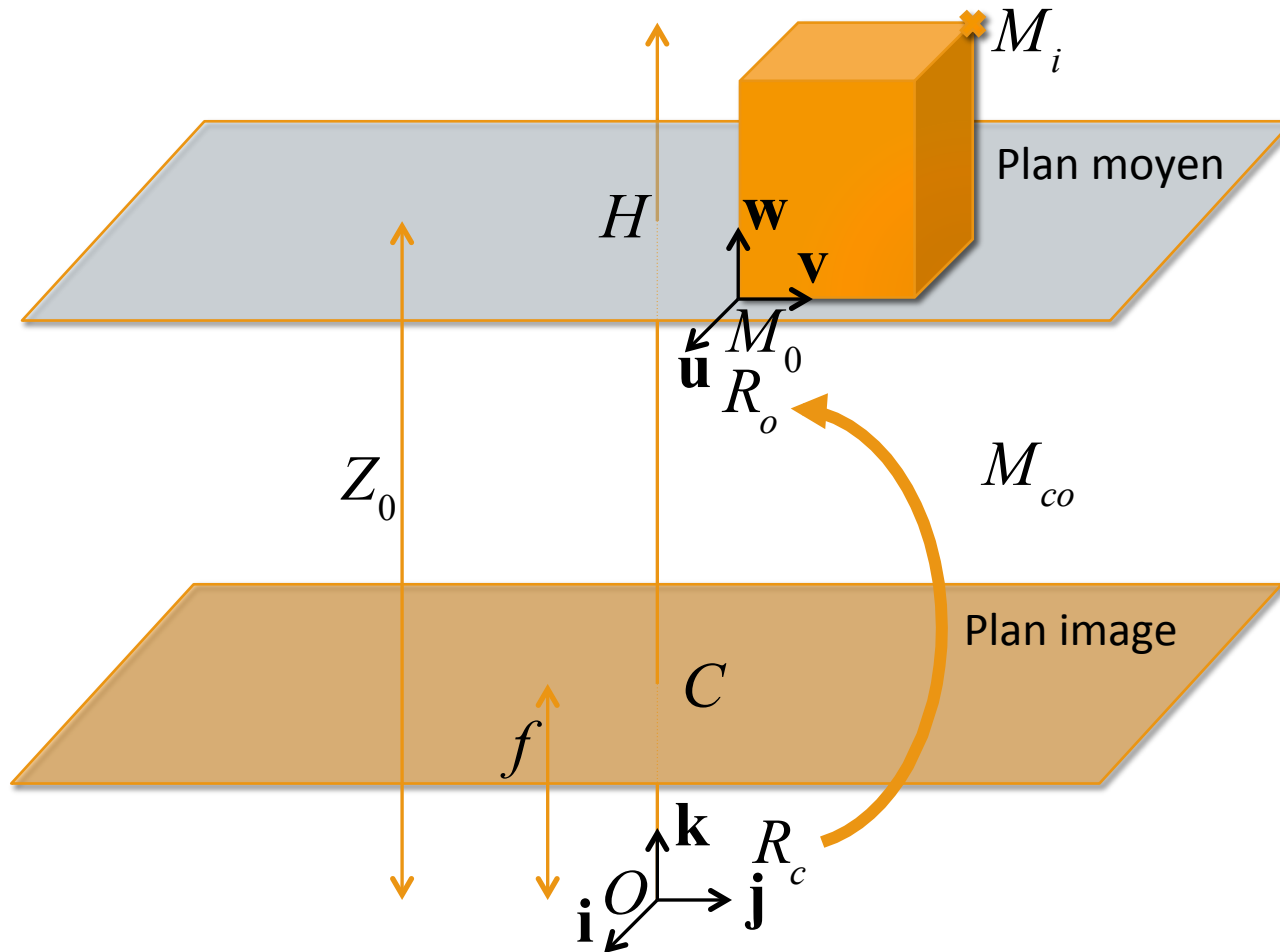
Estimation de pose

POSIT : algorithme



Estimation de pose

POSIT : algorithme

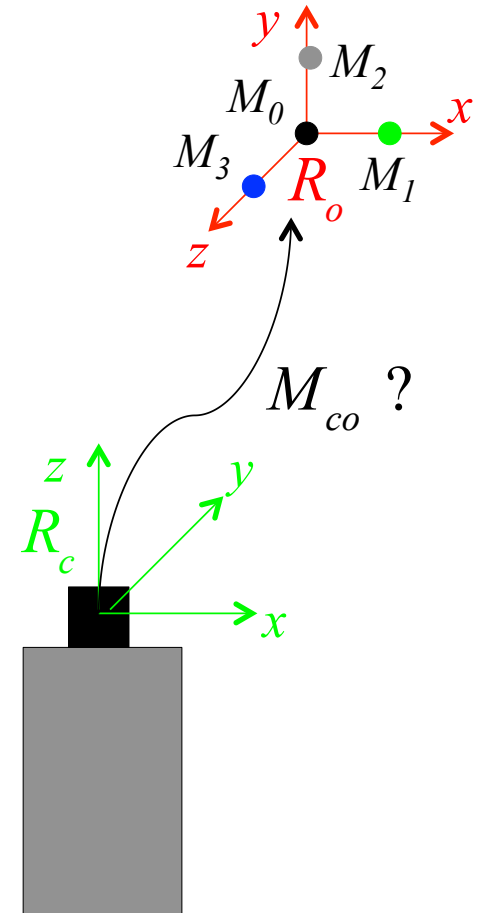


Estimation de pose

POSIT : exercice

Une caméra munie d'un objectif de focale 1 cm a dans son champ de vision un objet constitué de 4 points dont les coordonnées dans le repère R_o sont les suivantes :

$$M_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_1 \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M_2 \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Estimation de pose

POSIT : exercice

1. Synthèse de l'image idéale

Calculer les coordonnées des projections des 4 points dans le plan image sachant que la matrice homogène de transformation entre la caméra et l'objet est égale à :

$$M_{co} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0 & -1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Retrouver M_{co} avec POSIT

Retrouver M_{co} à partir de l'image idéale synthétisée en 1.

Estimation de pose

POSIT : exercice

1. Synthèse de l'image idéale

2. Application de POSIT

Estimation de pose

POSIT : exercice

Initialisation de ε_i à 0

Itération 1 :

Estimation de pose

POSIT : exercice

Itération 1 :

Estimation de pose

POSIT : exercice

Itération 2 :

$$\begin{aligned} {}^o\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 4.32 \cdot 10^{-2} \\ -5.85 \cdot 10^{-4} \\ -3.97 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} & {}^o\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} 3.97 \cdot 10^{-3} \\ -3.9 \cdot 10^{-4} \\ -3.333 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} & {}^o\mathbf{i} &= \begin{bmatrix} 0.996 \\ -1.35 \cdot 10^{-2} \\ -9.14 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \\ {}^o\mathbf{j} &= \begin{bmatrix} 0.118 \\ -1.16 \cdot 10^{-2} \\ -0.993 \end{bmatrix} & {}^o\mathbf{k} &= \begin{bmatrix} 1.123 \cdot 10^{-2} \\ 0.998 \\ -0.997 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} & Z_0 &= 0.26 & \varepsilon_1 &= 4.74 \cdot 10^{-3} \\ & & & & & \varepsilon_2 &= 0.377 \\ & & & & & \varepsilon_3 &= -3.84 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Estimation de pose

POSIT : exercice

Itération 5 :

$$\begin{aligned} {}^o\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 3.33 \cdot 10^{-2} \\ -2.56 \cdot 10^{-4} \\ 2.11 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} & {}^o\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} -2.17 \cdot 10^{-5} \\ -1.7 \cdot 10^{-4} \\ -3.333 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} & {}^o\mathbf{i} &= \begin{bmatrix} 0.99997 \\ -7.68 \cdot 10^{-3} \\ 6.33 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \\ {}^o\mathbf{j} &= \begin{bmatrix} -6.5 \cdot 10^{-4} \\ -5.11 \cdot 10^{-3} \\ -0.99999 \end{bmatrix} & {}^o\mathbf{k} &= \begin{bmatrix} 1.123 \cdot 10^{-2} \\ 0.998 \\ -0.997 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} & Z_0 &= 0.3002 & \varepsilon_1 &= 2.56 \cdot 10^{-3} \\ & & & & & \varepsilon_2 &= 0.333 \\ & & & & & \varepsilon_3 &= -1.7 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Estimation de pose

POSIT : exercice

Arrêt à l'itération 5 :

$$T_x = x_0 \frac{Z_0}{f} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0.3002}{0.01} = 0.1501 \quad T_y = y_0 \frac{Z_0}{f} = 0.1001$$

$$T_z = Z_0 = 0.3002 \quad R_{co} = \begin{pmatrix} 0.99997 & -7.68 \cdot 10^{-3} & 6.33 \cdot 10^{-4} \\ -6.5 \cdot 10^{-4} & -5.11 \cdot 10^{-3} & -0.99999 \\ 7.69 \cdot 10^{-3} & 0.99995 & -5.12 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

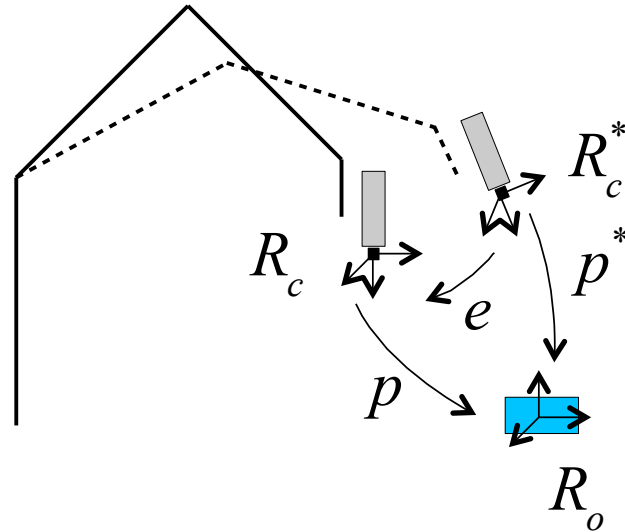
On retrouve à 10^{-4} près les termes de M_{co} qui nous avait servie à calculer l'image idéale de l'objet.

Estimation de pose

Pose relative

Estimer la pose relative entre 2 images :

- Tâche de suivi de cible
- Faible erreur de suivi
- p^* pose désirée
- p pose courante
- Trouver $e = p - p^*$



Estimation de pose

Pose relative

$$\text{Soit : } \dot{F} = L_F C_c$$

Avec :

\dot{F} vitesse des primitives dans l'image

L_F matrice d'interaction (Jacobien image)

C_c torseur cinématique de R_c

$$\text{Soit : } \dot{e} = L_e C_c$$

Avec :

L_e le Jacobien de la pose

Estimation de pose

Pose relative

On obtient :

$$\dot{e} = L_e L_F^+ \dot{F} \text{ avec } L_F^+ = \left(L_F^T L_F \right)^{-1} L_F^T$$

Approximation au 1^{er} ordre :

$$e \approx L_e L_F^+ \left(F - F^* \right) \text{ pour } F - F^* \text{ petit.}$$

Avec :

F^* les primitives en p^*

F les primitives en p

Estimation de pose

Pose relative

Si les primitives sont les coordonnées x_i, y_i de n points (pix) :

$$L_F = \begin{pmatrix} -\frac{G_x}{Z_1} & 0 & \frac{x_1}{Z_1} & \frac{x_1 y_1}{G_y} & -\frac{G_x^2 + x_1^2}{G_x} & \frac{y_1 G_x}{G_y} \\ 0 & -\frac{G_y}{Z_1} & \frac{y_1}{Z_1} & \frac{G_y^2 + y_1^2}{G_y} & -\frac{x_1 y_1}{G_x} & -\frac{x_1 G_y}{G_x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{G_x}{Z_n} & 0 & \frac{x_n}{Z_n} & \frac{x_n y_n}{G_y} & -\frac{G_x^2 + x_n^2}{G_x} & \frac{y_n G_x}{G_y} \\ 0 & -\frac{G_y}{Z_n} & \frac{y_n}{Z_n} & \frac{G_y^2 + y_n^2}{G_y} & -\frac{x_n y_n}{G_x} & -\frac{x_n G_y}{G_x} \end{pmatrix} F = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

$Z_1 \dots Z_n$ sont les profondeurs des points le long de l'axe optique.

Estimation de pose

Pose relative

Si les angles sont exprimés avec la représentation angle/axe :

$$L_e = \begin{pmatrix} R_{c^*c} & 0 \\ 0 & L_{\theta u} \end{pmatrix} \text{ avec } e = \begin{bmatrix} t_{c^*c} \\ \theta u \end{bmatrix}$$

$$L_{\theta u} = I_3 - \frac{\theta}{2} [u]_{\times} + \left(1 - \frac{\text{sinc}\theta}{\text{sinc}^2 \frac{\theta}{2}} \right) [u]_{\times}^2 \text{ et } [u]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix}$$

Estimation de pose

Pose relative

Dans ce cas : $L_e \xrightarrow{e \rightarrow 0} I_6$

D'où :

$$e \approx L_F^+ (F - F^*) \text{ pour } F - F^* \text{ petit.}$$

- Adapté au suivi de cible car e est maintenu petit par l'asservissement visuel.
- Rapide car la pseudo-inverse peut être calculée au préalable.
- Imprécis quand e augmente.

Estimation de pose

Pose relative : exemple

Soit :

$$t_{c^*c} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \theta = 0.1 \text{ rad et } u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Qui correspond à :

$$F^* = \begin{bmatrix} 500 & 333 & 833 & 333 & 375 & 250 & 500 & 0 \end{bmatrix}^T$$

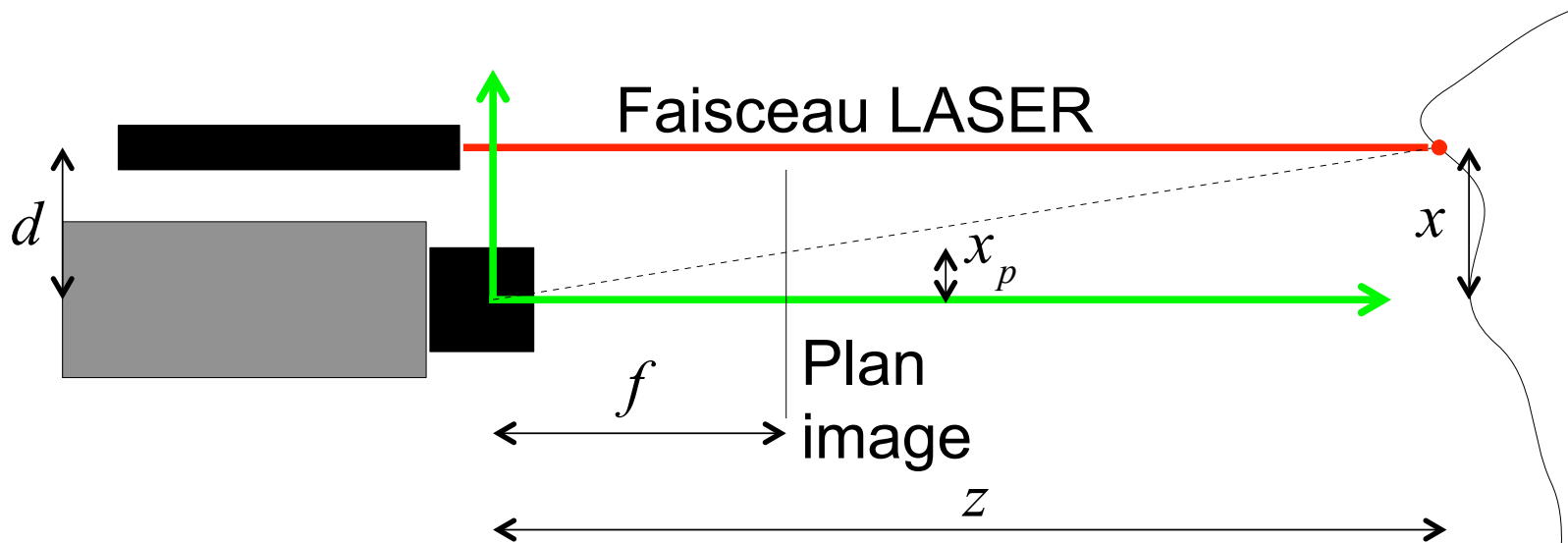
$$F = \begin{bmatrix} 173.3 & 448.7 & 519.9 & 448.7 & 128.9 & 359.3 & 167.5 & 100.3 \end{bmatrix}^T$$

On obtient alors:

$$L_F^+(F - F^*) = \begin{bmatrix} 0.099 & 0.002 & 0.002 & 0.102 \begin{bmatrix} 0.986 & 0.06 & -0.15 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^T$$

Estimation de pose

Utilisation de marqueurs lumineux : exemple



Profile de la surface de la scène

$$\text{On a donc : } x_p = f \frac{x}{z} = f \frac{d}{z} \text{ d'où : } z = f \frac{d}{x_p}$$

Il est possible de connaître la profondeur de la scène.

Estimation de POSE

Utilisation d'OpenCV

Fonction [solvePnP](#) :

- Paramètres :
 - Coordonnées des points de l'objet
 - Coordonnées des points dans l'image
 - Paramètres intrinsèques de la caméra
 - Algorithme utilisé (3 possibilités)
- Valeurs retournées :
 - Vecteur de translation
 - Vecteur de rotation en utilisant la représentation angle / axe