Robotique
Manipulation et commande

Université de Strasbourg

Telecom Physique Strasbourg, option ISAV

Master IRIV, parcours AR

Chapitre 1 – Rappels de mécanique

Plan du chapitre

- Conventions
- 1. Positionnement
  - 1.1. Rotation
  - 1.2. Décompositions de la rotation
  - 1.3. Attitude
  - 1.4. Matrice homogène
- 2. Cinématique
  - 2.1. Vitesse d'un solide indéformable
  - 2.2. Vecteur vitesse de rotation
  - 2.3. Mouvement rigide
  - 2.4. Torseur cinématique

Conventions

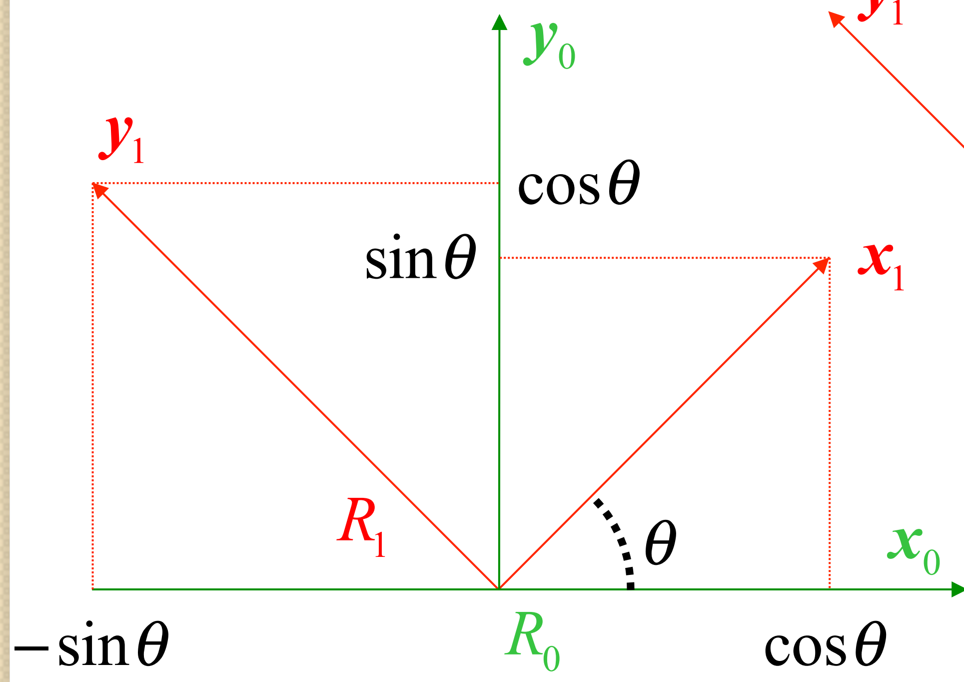
R_i	Repère numéro i
P	Point
${}^iP$	Coordonnées de P dans le repère i
$\vec{v}$ ou $\boldsymbol{v}$	Vecteur
${}^i\boldsymbol{v}$	Coordonnées de $\vec{v}$ dans le repère i
$\overrightarrow{OP}$ ou $\boldsymbol{OP}$	Vecteur
${}^i(\boldsymbol{OP})$	Coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ dans le repère i
$\vec{u} \times \vec{v}$	Produit vectoriel
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	Produit scalaire
${}^0R_{01}$ ou R_{01}	Rotation du repère 0 vers le repère 1 exprimée dans 0^*
${}^0M_{01}$ ou M_{01}	Matrice homogène du repère 0 vers le repère 1 exprimée dans 0^*

* Si le nombre de repères dépasse 10, mettre un espace entre les 2 numéros comme dans $M_{12\ 13}$.

I. Positionnement

I.1. Rotations : le cas 2D

- Représentation de la rotation :



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} {}^0x_1 & {}^0y_1 \end{array} \\
R_{01} = & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{array}{c}\cos\theta \\ \sin\theta\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{array}} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

I. Positionnement

I.1. Rotations : le cas 2D

- Propriétés :

$$R_{01} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left\{R_{01}\right\} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

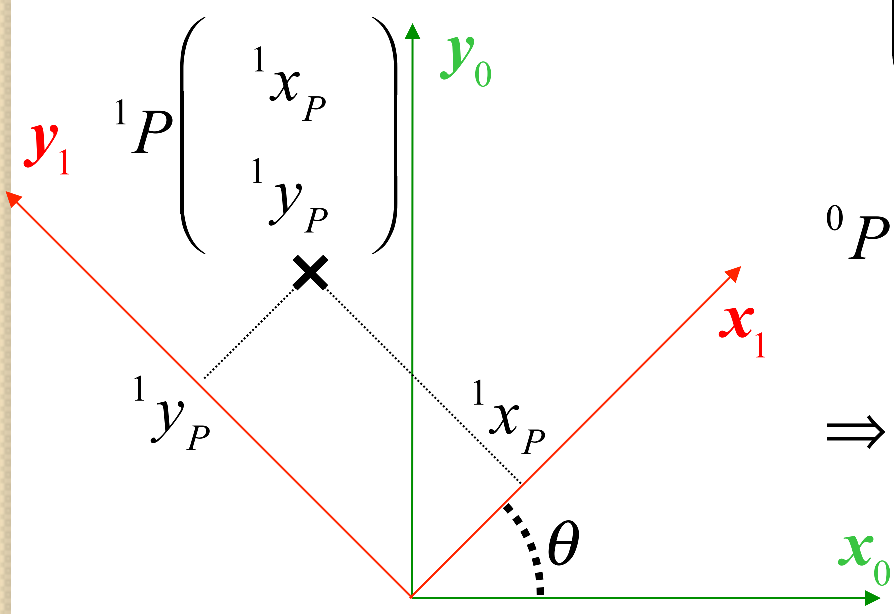
$$\Rightarrow R_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_{01}^{T} = R_{10}$$

- Ce type de matrice *2x2* appartient au groupe spécial orthogonal d'ordre *2* noté *SO(2)*

I. Positionnement

I.1. Rotations : le cas 2D

- Changement de repère :



$$ {}^1P\begin{pmatrix} {}^1x_P \\ {}^1y_P \end{pmatrix} $$

$$ {}^0P\begin{pmatrix} {}^0x_P = {}^1x_P\cos\theta - {}^1y_P\sin\theta \\ {}^0y_P = {}^1x_P\sin\theta + {}^1y_P\cos\theta \end{pmatrix} $$

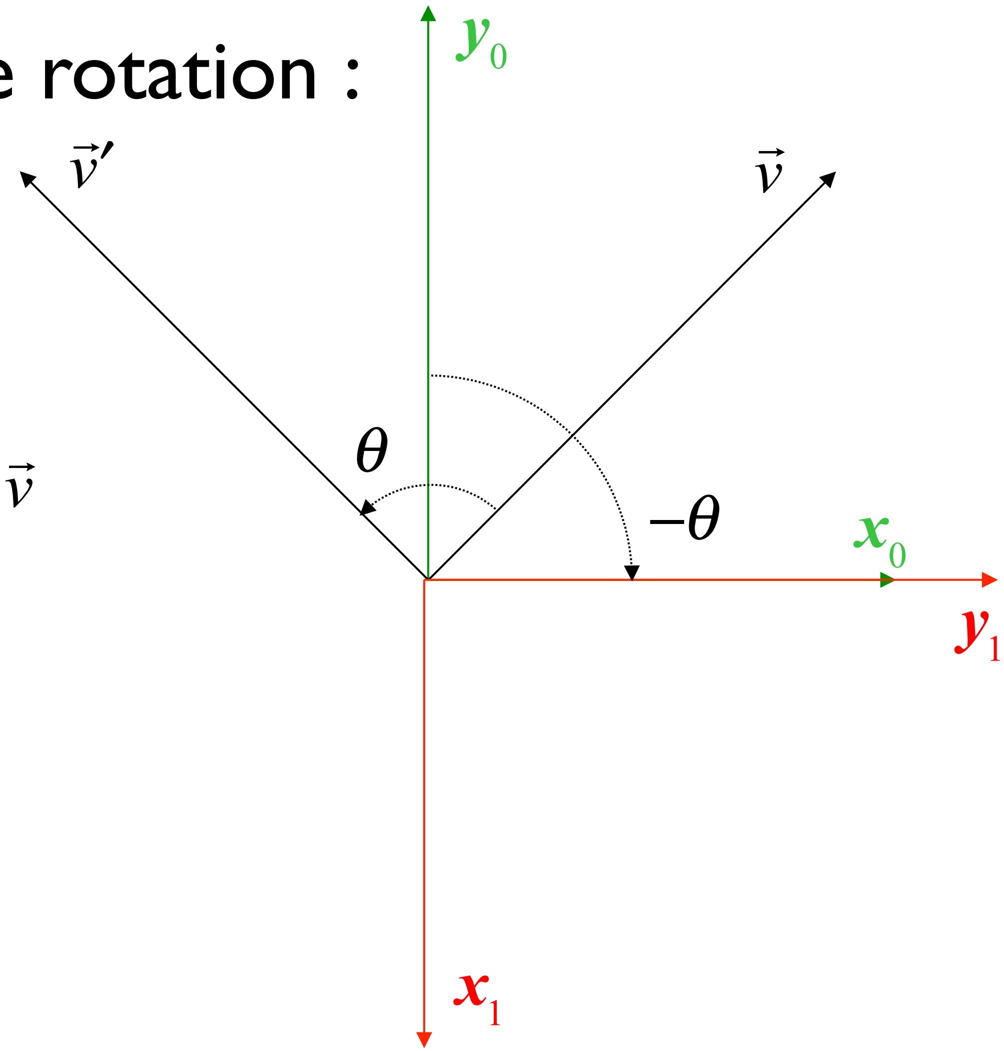
$$ \Rightarrow {}^0P = R_{01}\,{}^1P $$

I. Positionnement

I.1. Rotations : le cas 2D

- Opérateur de rotation :

$$^{0}\vec{v}' = {}^{1}\vec{v} = R_{10}\,{}^{0}\vec{v} = R_{\theta}\,{}^{0}\vec{v}$$



1. Positionnement

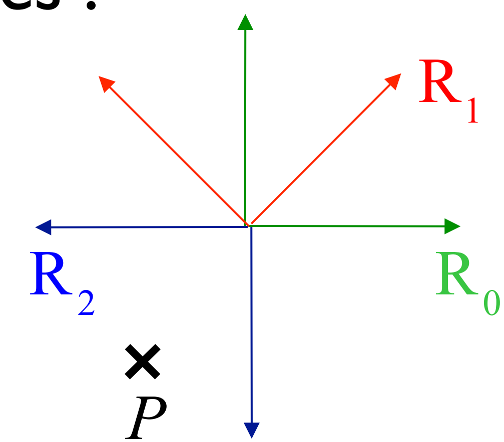
1.1. Rotations : le cas 2D

- Composition :
  - Transformation de coordonnées :

$$^{1}P = R_{12}\,{}^{2}P$$

$$^{0}P = R_{01}\,{}^{1}P$$

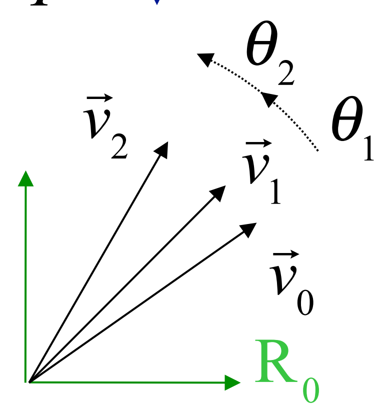
$$\Rightarrow {}^{0}P = R_{01}R_{12}\,{}^{2}P = R_{02}\,{}^{2}P$$



  - Opérateur de rotation :

$$\vec{v}_1 = R_{\theta_1}\vec{v}_0 \qquad \vec{v}_2 = R_{\theta_2}\vec{v}_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = R_{\theta_2}R_{\theta_1}\vec{v}_0$$



1. Positionnement

1.1. Rotations : généralisation à la 3D

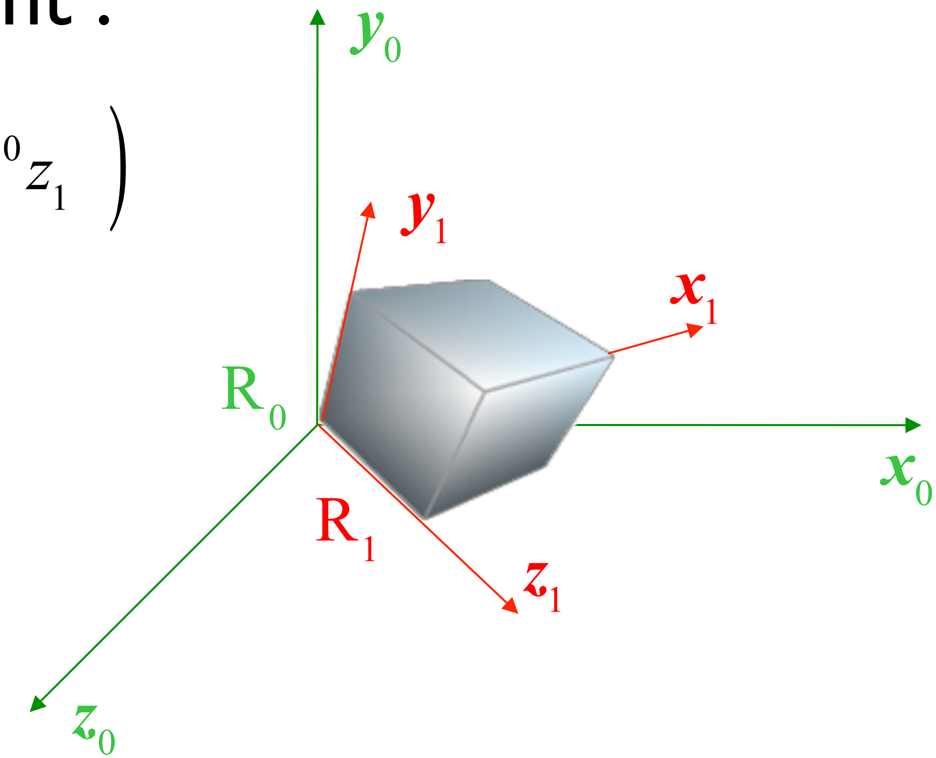
- Positionnement :

$$R_{01} = \begin{pmatrix} {}^0x_1 & {}^0y_1 & {}^0z_1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left\{R_{01}\right\} = 1$$

$$R_{01}^{-1} = R_{01}^{T} = R_{10}$$

$$R_{01} \in SO(3)$$



I. Positionnement

I.1. Rotations : généralisation à la 3D

- Changement de repère :

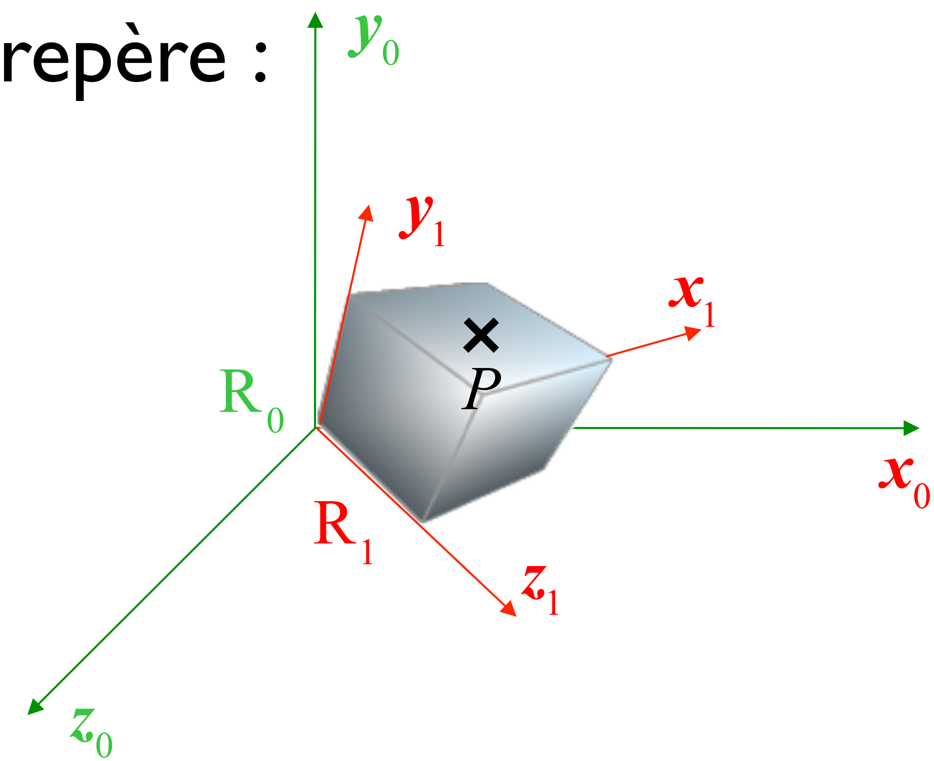
$$ {}^{0}P = R_{01}\,{}^{1}P $$

- Composition :

$$ {}^{1}P = R_{12}\,{}^{2}P $$

$$ {}^{0}P = R_{01}\,{}^{1}P $$

$$ \Rightarrow {}^{0}P = R_{01}R_{12}\,{}^{2}P = R_{02}\,{}^{2}P $$

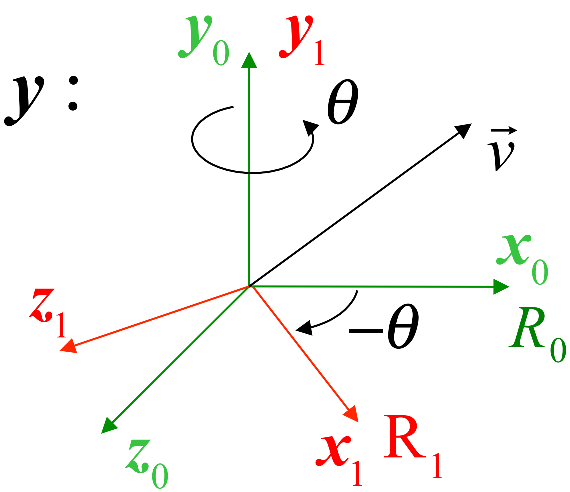


I. Positionnement

I.1. Rotations : généralisation à la 3D

- Opérateur de rotation :
  - Ex : rotation de $\boldsymbol{v}$ autour de $\boldsymbol{y}$:

$$R_{(y_0,\theta)} = R_{10} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cos\theta & & \sin\theta \end{array} \\ \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \end{array}$$



$${}^0\boldsymbol{v}' = R_{10}\,{}^0\boldsymbol{v} = R_{(y_0,\theta)}\,{}^0\boldsymbol{v}$$

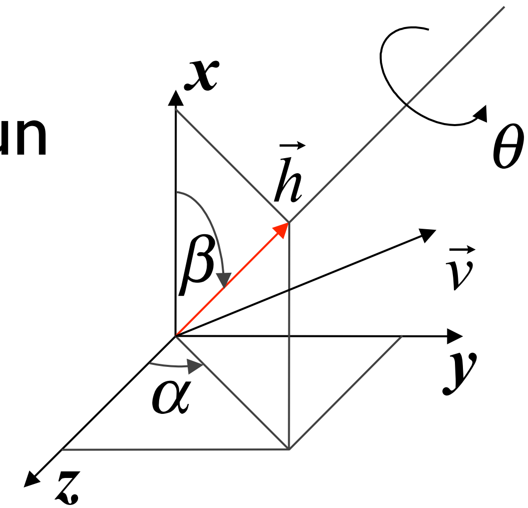
  - Autres rotations élémentaires :

$$R_{(x_0,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix} \qquad R_{(z_0,\theta)} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Positionnement

1.1. Rotations : généralisation à la 3D

- Opérateur de rotation : cas général
  - Rotation de $\boldsymbol{v}$ autour de $\boldsymbol{h}$ d'un angle θ :
  - Méthode :
    - Transformer $\boldsymbol{v}$ par une rotation qui amène $\boldsymbol{h}$ sur $\boldsymbol{x}$
    - Faire la rotation de θ autour de $\boldsymbol{x}$
    - Faire la transformation inverse pour ramener $\boldsymbol{h}$ à sa position initiale



$$R_{(\boldsymbol{h},\theta)} = R_{(\boldsymbol{x},\alpha)} R_{(\boldsymbol{y},\beta)} R_{(\boldsymbol{x},\theta)} R_{(\boldsymbol{y},-\beta)} R_{(\boldsymbol{x},-\alpha)}$$

1. Positionnement

1.1. Rotations : généralisation à la 3D

- Avec :

$$R_{(\boldsymbol{h},\theta)} = \begin{bmatrix} h_x^{\ 2} v_\theta + c\theta & h_x h_y v_\theta - h_z s\theta & h_x h_z v_\theta + h_y s\theta \\ h_x h_y v_\theta + h_z s\theta & h_y^{\ 2} v_\theta + c\theta & h_y h_z v_\theta - h_x s\theta \\ h_x h_z v_\theta - h_y s\theta & h_y h_z v_\theta + h_x s\theta & h_z^2 v_\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

- Et : $v_\theta = 1 - c\theta \quad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}^T$

1. Positionnement

1.1. Rotations : résumé

- Propriétés :
  - Ortho-normalité :
    - La norme des vecteurs lignes et des vecteurs colonne est égale à *1*.
    - Les vecteurs ligne et les vecteurs colonne sont orthogonaux deux à deux.
  - L'inverse est égale à la transposée.
  - Le déterminant est égal à *1*.
  - $R_{02} = R_{01} R_{12} \quad R_{(\boldsymbol{h_1},\theta_1)(\boldsymbol{h_2},\theta_2)} = R_{(\boldsymbol{h_2},\theta_2)} R_{(\boldsymbol{h_1},\theta_1)}$
  - Pas commutatif : $R_{01} R_{12} \neq R_{12} R_{01}$

I. Positionnement

I.2. Représentations de la rotation : introduction

- Soit R, une matrice de rotation :
  - R comprend 9 termes
  - Il y a 6 relations indépendantes entre ces termes :

$$\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y = 0 \quad \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_z = 0 \quad \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_z = 0$$

$$\left\|\boldsymbol{r}_x\right\| = \left\|\boldsymbol{r}_y\right\| = \left\|\boldsymbol{r}_z\right\| = 1$$

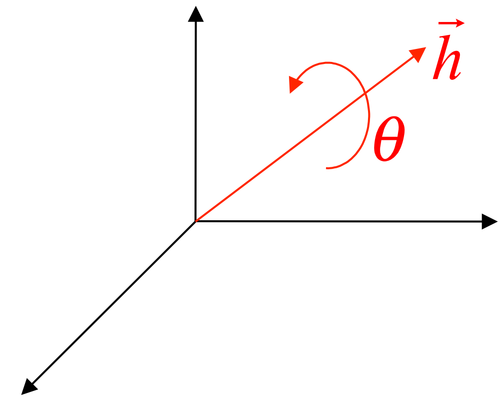
  - Il n'y a donc que 3 termes indépendants.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_x & \boldsymbol{r}_y & \boldsymbol{r}_z \end{bmatrix}$$

I. Positionnement

I.2. Représentations de la rotation : angle/axe

- Paramétrage angle/axe :
  - Toute rotation peut être représentée par un axe de rotation défini par un vecteur unitaire $\boldsymbol{h}$ autour duquel on effectue une rotation θ.



$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right) \qquad \boldsymbol{h} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix}$$

  - Le vecteur $\theta\boldsymbol{h}$ définit entièrement la rotation.

1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : quaternions

- La rotation est parfois représentée par un quaternion unitaire :
  - Soit : $\theta \boldsymbol{h} = \theta \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}^T$
  - Le quaternion $\boldsymbol{p}$ équivalent est défini par :

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}^T =$$

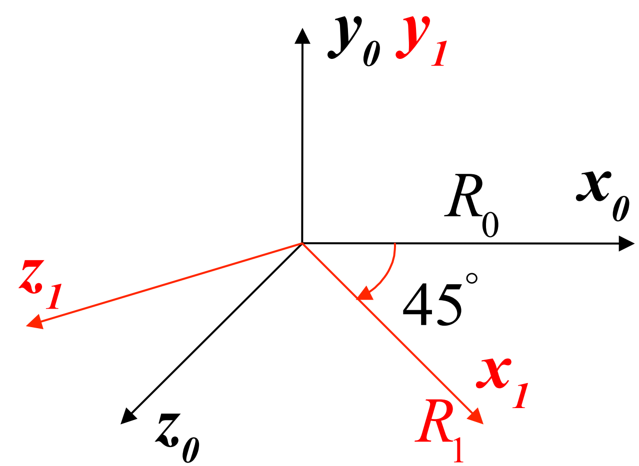
$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} h_x & \sin\frac{\theta}{2} h_y & \sin\frac{\theta}{2} h_z \end{bmatrix}^T$$

  - Avec : $\left\| \boldsymbol{p} \right\| = 1$

1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : angle/axe, exercice

- Trouver le paramétrage angle/axe de la rotation entre les repères R_0 et R_1 :

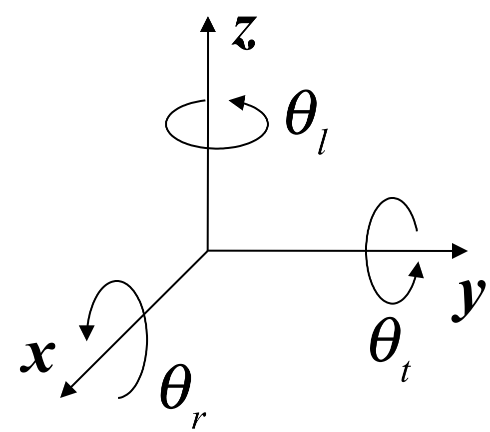


1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : roulis, tangage, lacet

- Définition :
  - 3 rotation successives autour des axes $\boldsymbol{x}$ (roulis, *roll*), $\boldsymbol{y}$ (tangage, *pitch*), et $\boldsymbol{z}$ (lacet, *yaw*) de R_0.

$$R_{01} = R_{(\boldsymbol{z},\theta_l)} R_{(\boldsymbol{y},\theta_t)} R_{(\boldsymbol{x},\theta_r)}$$



  - Il existe des définitions alternatives des noms des axes et/ou de la rotation associée.

1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : roulis, tangage, lacet

- Matrice de rotation :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} c\theta_l & -s\theta_l & 0 \\ s\theta_l & c\theta_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_t & 0 & s\theta_t \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_t & 0 & c\theta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_r & -s\theta_r \\ 0 & s\theta_r & c\theta_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_l c\theta_t & -s\theta_l c\theta_r + c\theta_l s\theta_t s\theta_r & s\theta_l s\theta_r + c\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ s\theta_l c\theta_t & c\theta_l c\theta_r + s\theta_l s\theta_t s\theta_r & -c\theta_l s\theta_r + s\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ -s\theta_t & c\theta_t s\theta_r & c\theta_t c\theta_r \end{bmatrix}$$

1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : roulis, tangage, lacet

- Transformation inverse :
  - Trouver $\theta_r, \theta_t, \theta_l$ à partir des r_{ij} de la matrice R_{01}
  - On définit $\theta_t = \arcsin(-r_{31})$
  - D'où :

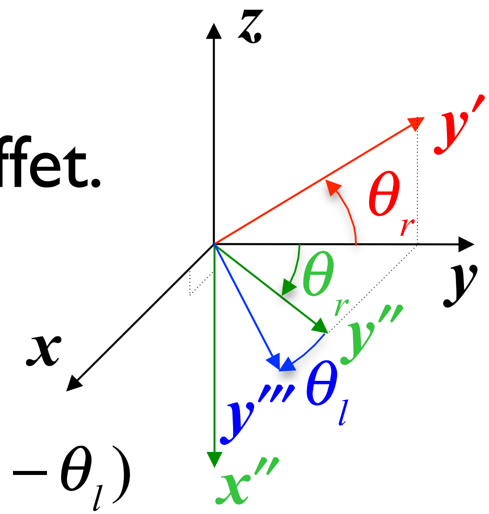
$$R_{01} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta_l = \arctan 2\left(\dfrac{r_{21}}{c\theta_t}; \dfrac{r_{11}}{c\theta_t}\right) \\ \theta_r = \arctan 2\left(\dfrac{r_{32}}{c\theta_t}; \dfrac{r_{33}}{c\theta_t}\right) \end{cases} \quad \text{pour } \cos\theta_t \neq 0$$

1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : roulis, tangage, lacet

- Cas singulier : $\theta_t = \pm\dfrac{\pi}{2}$
  - Roulis et lacet ont le même effet.
  - *Gimbal lock* en anglais.



$$\theta_t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_{12} = \sin(\theta_r - \theta_l) \quad r_{13} = \cos(\theta_r - \theta_l) \\ r_{22} = \cos(\theta_l - \theta_r) \quad r_{23} = \sin(\theta_l - \theta_r) \end{cases}$$

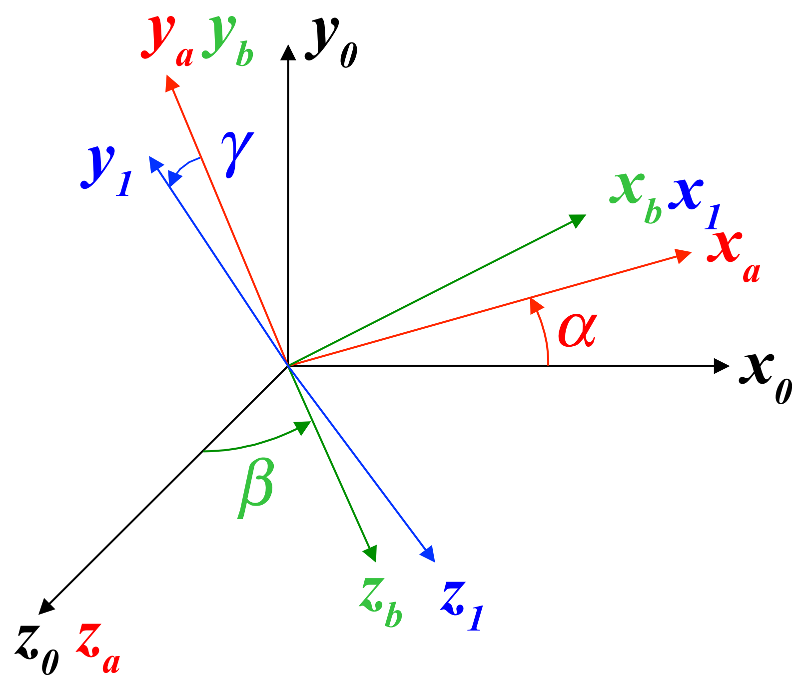
On choisit $\theta_l = 0 \Rightarrow \theta_r = \arctan 2\left(r_{12}, r_{22}\right)$

$$\theta_t = -\frac{\pi}{2} : \theta_l = 0 \Rightarrow \theta_r = -\arctan 2\left(r_{12}, r_{22}\right)$$

1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : angles d'Euler

- Principe :
  - Faire trois rotations successives d'angle α, β, γ autour des axes *z*, *y* et *x* du repère <u>courant</u>.



1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : angles d'Euler

- Matrice de rotation :

$$R_{01} = R_{0a} R_{ab} R_{b1} \quad \text{avec} \quad R_{0a} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} R_{b1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où : } R_{01} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

1. Positionnement

1.2. Représentations de la rotation : angles d'Euler

- Transformation inverse :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \arcsin(-r_{31}) \\ \alpha &= \arctan 2\left(\frac{r_{21}}{\cos\beta} ; \frac{r_{11}}{\cos\beta}\right) \\ \gamma &= \arctan 2\left(\frac{r_{32}}{\cos\beta} ; \frac{r_{33}}{\cos\beta}\right) \end{aligned}\right\} \text{pour } \beta \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

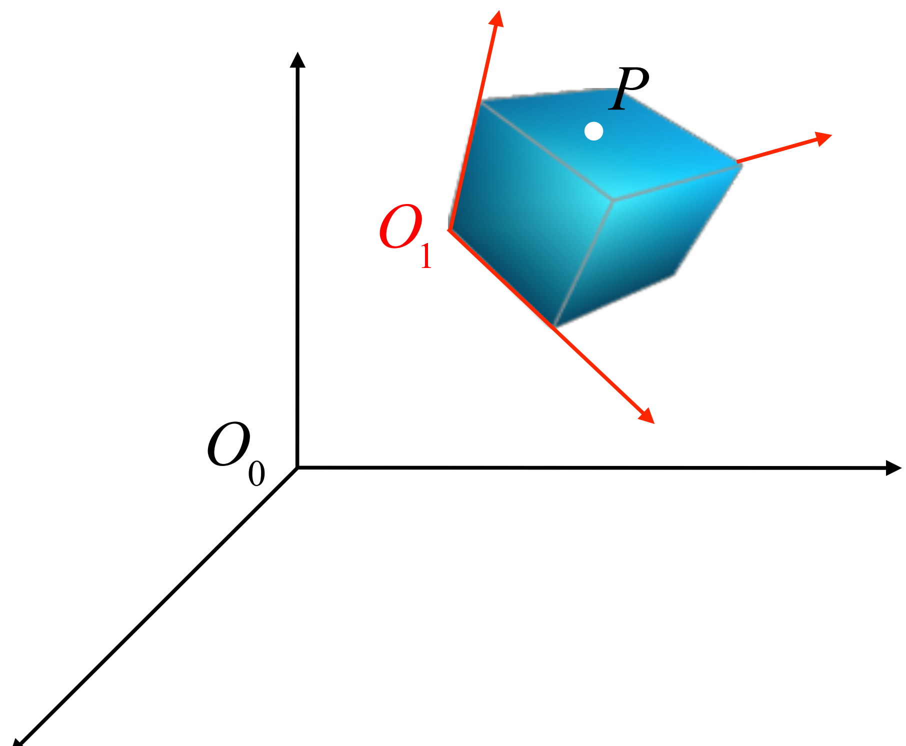
$$\beta = \frac{\pi}{2} : \alpha = 0 \quad \gamma = \arctan 2(r_{12}, r_{22})$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} : \alpha = 0 \quad \gamma = -\arctan 2(r_{12}, r_{22})$$

I. Positionnement

I.3. Attitude : définition

- L'attitude du repère R_1 par rapport au repère R_0 est définie par la translation des origines et par la rotation R_{01} : $\left(\overrightarrow{O_0O_1}, R_{01}\right)$



I. Positionnement

I.3. Attitude : représentation

- Une attitude p (*pose* en anglais) est définie de manière minimale par 6 paramètres : 3 pour la translation et 3 pour la rotation :

$$p = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3 coordonnées de translation

3 coordonnées de rotation :
Angles d'Euler, angle/axe, …

1. Positionnement

1.3. Attitude : représentation

- Une attitude peut aussi être représentée par une matrice homogène.
- La matrice homogène est aussi :
  - Un opérateur de changement de repère
  - Un opérateur de transformation rigide

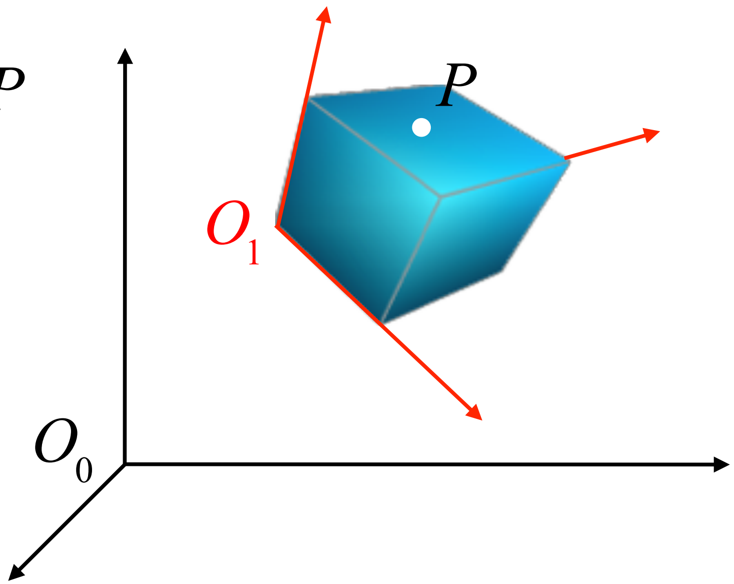
$$M_{01} = \begin{bmatrix} R_{01} & {}^{0}(\boldsymbol{O_0 O_1}) \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice homogène de transformation entre le repère R_0 et le repère R_1

1. Positionnement

1.4. Matrices homogènes : changement de repère

- On a : ${}^{0}P = {}^{0}\left(\boldsymbol{O_0O_1}\right) + R_{01}\,{}^{1}P$



- D'où :

$$\begin{bmatrix} {}^{0}P \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{01} & {}^{0}\left(\boldsymbol{O_0O_1}\right) \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_{01}} \begin{bmatrix} {}^{1}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordonnées homogènes

I. Positionnement

I.4. Matrices homogènes : transformation rigide

- La matrice homogène est un opérateur de transformation rigide
- Un opérateur de transformation rigide appliqué à tous les points d'un solide ne déforme pas ce solide
- La matrice homogène applique une transformation équivalente à la composition d'une translation et d'une rotation

1. Positionnement

1.4. Matrices homogènes : propriétés

- Composition :

$$M_{02} = M_{01} M_{12}$$

Opérateur de changement de repère de coordonnées de points de R_2 vers R_0

- Inverse :

$$M = \begin{bmatrix} R & T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- Pas commutatif !

I. Positionnement

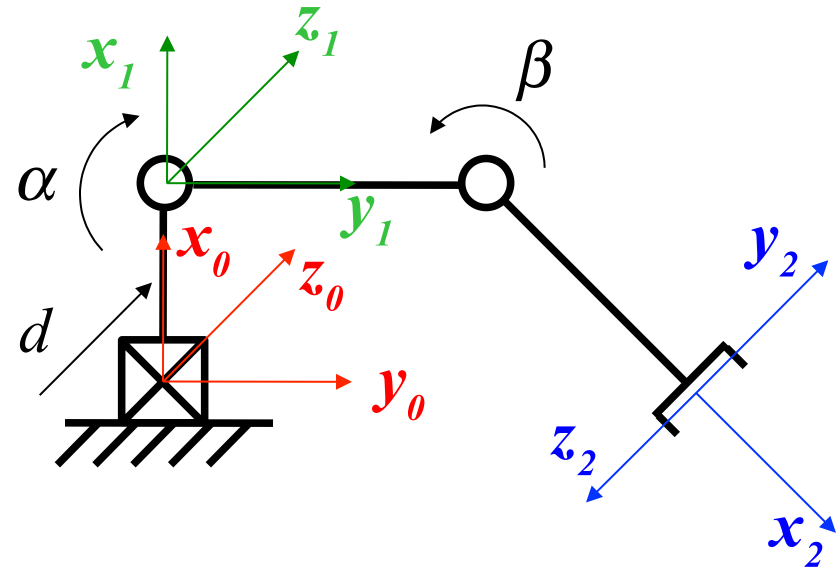
I.4. Matrices homogènes : exercice

- Soit le robot :

$$\alpha = \sphericalangle\left(y_0, y_1\right)$$

$$\beta = \sphericalangle\left(y_1, x_2\right)$$

$$d = \text{ translation suivant } z_0$$



- Avec :
  - a_1 la distance entre l'origine de R_0 et celle de R_1
  - a_2 la longueur du premier bras
  - a_3 la longueur du dernier bras
  - Les angles sont nuls lorsque le bras est horizontal

1. Positionnement

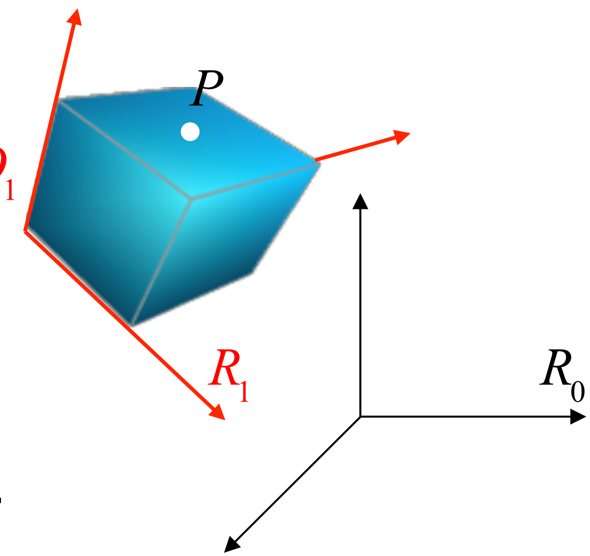
1.4. Matrices homogènes : exercice

- Déterminer M_{01} , M_{12} puis M_{02}

2. Cinématique

2.1. Vitesse d'un solide : introduction

- Soient :
  - R_1 un repère lié à un solide en mouvement par rapport à un repère R_0
  - $M_{01}(t)$ la matrice homogène de transformation entre R_0 et R_1 en fonction du temps



$$\begin{bmatrix} {}^0P(t) \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01}(t) \begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^0\dot{P}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{M}_{01}(t) \begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix}$$

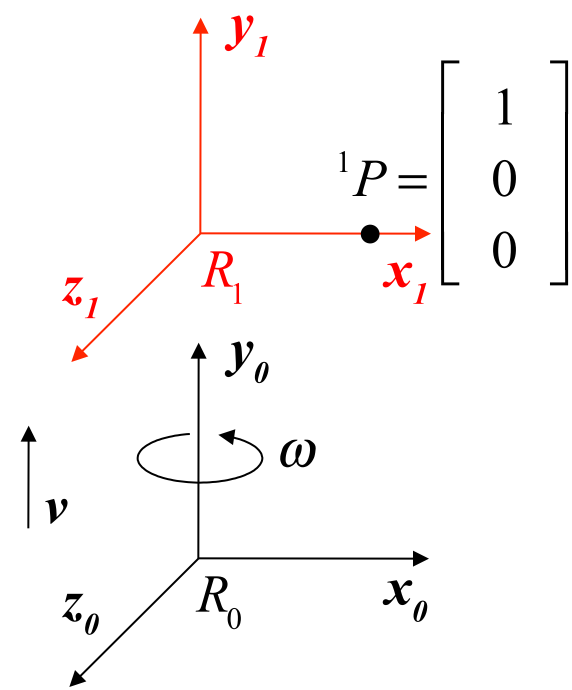
$$M_{01}(t) = \begin{bmatrix} R_{01}(t) & T_{01}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^0\dot{P}(t) = \dot{R}_{01}(t)\,{}^1P + \dot{T}_{01}(t) \quad (2.1)$$

Vitesse de translation de O_1 dans R_0

2. Cinématique

2.1. Vitesse d'un solide : exemple

- Soient :
  - P un point d'un solide lié à R_1 en mouvement par rapport à R_0
  - Le mouvement est la composition d'une translation verticale de vitesse v et d'une rotation d'axe y_0 et de vitesse ω . Pour $t=0$ on a $R_1=R_0$.



2. Cinématique

2.1. Vitesse d'un solide : exemple

- On a :

$$R_{01}(t)=\begin{bmatrix} c(\omega t) & 0 & s(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\omega t & 0 & c\omega t \end{bmatrix} \quad T_{01}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{bmatrix}$$

- D'où :

$$^{0}\dot{P}(t)=\begin{bmatrix} -\omega s(\omega t) & 0 & \omega c(\omega t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega c(\omega t) & 0 & -\omega s(\omega t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\omega s(\omega t) \\ v \\ -\omega c(\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{0}\dot{P}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ v \\ -\omega \end{bmatrix}$$

2. Cinématique

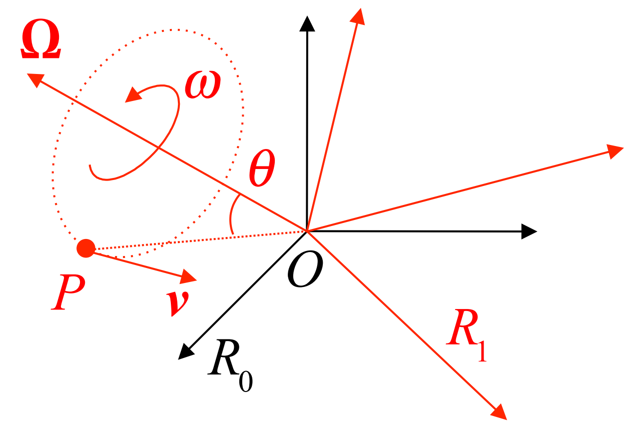
2.2. Vecteur vitesse de rotation : définition

- C'est un vecteur dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation, qui est dirigé suivant le « principe du tire-bouchon » et dont la norme est égale à la valeur de la vitesse angulaire.
- Note :
  - Dans l'exemple précédent, le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R_0 est dirigé suivant $\boldsymbol{y_0}$ et a pour norme ω.

2. Cinématique

2.2. Vecteur vitesse de rotation : application

- Application :
  - Trouver la vitesse du point P lié au repère R_1 qui tourne suivant un vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport à R_0
  - On a : $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{\Omega}\| \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \cdot \sin\theta$
  - De plus : $\boldsymbol{v} \perp \left(\overrightarrow{OP}, \boldsymbol{\Omega}\right)$
  - Et le sens de $\boldsymbol{v}$ est celui de la règle des 3 doigts.



Vitesse de P dans le mouvement de R_1 par rapport à R_0 exprimé dans R_0

  - D'où : $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OP}$ $\quad {}^0\boldsymbol{v}_{01}^P = {}^0\boldsymbol{\Omega} \times {}^0(\boldsymbol{OP}) \quad (2.2)$

2. Cinématique

2.3. Vecteur vitesse de rotation : matrice anti-symétrique

- On définit :
  - Les vecteurs : $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$
  - La matrice $AS(.)$:

$$AS(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

- D'où :

$$AS(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_y v_z - a_z v_y \\ a_z v_x - a_x v_z \\ a_x v_y - a_y v_x \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} \Rightarrow \boxed{{}^0\boldsymbol{v}_{01}^P = AS({}^0\boldsymbol{\Omega})R_{01}\,{}^1P} \quad (2.3)$$

2. Cinématique

2.3. Mouvement rigide

- Le repère R_1 se déplace par rapport à R_0 en translation et en rotation : on parle de mouvement rigide. Eq. (2.3) devient :

$$ {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{P} = AS({}^{0}\boldsymbol{\Omega})R_{01}\,{}^{1}P + {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_1} \quad (2.4) $$

Vitesse de l'origine de R_1

- Si on compare (2.4) et (2.1) :

$$ \boxed{AS({}^{0}\boldsymbol{\Omega})R_{01} = \frac{d}{dt}R_{01}} $$

2. Cinématique

2.3. Mouvement rigide : exercice

- Mouvement de R_1 par rapport à R_0 :
  - R_0 et R_1 ont leur origine commune,
  - Les angles de roulis et tangage évoluent selon ωt
  - L'angle de lacet est constant et nul
- Question :
  - Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R_0
- On a (définition de RTL) :

2. Cinématique

2.3. Mouvement rigide : exercice

- D’où :

- Et :

- De plus :
- D’où :

2. Cinématique
2.4. Torseur cinématique

- En robotique, on a l'habitude de définir le torseur cinématique de la manière suivante :

$$ {}^{0}\boldsymbol{C}_{01} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_1} \\ {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{01} \end{bmatrix} $$

Vecteur *6x1* des coordonnées de vitesse linéaire et angulaire de R_1 par rapport à R_0 exprimées dans R_0

2. Cinématique

2.5. Composition des vitesses

- Soient :

$^{0}\boldsymbol{C}_{01}$ le torseur cinématique de R_1 par rapport à R_0

$^{1}\boldsymbol{C}_{12}$ le torseur cinématique de R_2 par rapport à R_1

- Loi de composition :

$$^{0}\boldsymbol{C}_{02} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_2} + {}^{0}\boldsymbol{v}_{12}^{O_2} = {}^{0}\boldsymbol{v}_{02}^{O_2} \\ {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{01} + {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{12} = {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{02} \end{bmatrix}$$

Vitesse de O_2 dans le mouvement de *1* par rapport à *0* en figeant le mouvement de *2* par rapport à *1*.