Mathématiques pour la robotique

Myriam COMTE

22-10-2012

Fondation unit
Université Numérique Ingénierie et Technologie
GDR ROBOTIQUE
POLYTECH

Mathématiques pour la Robotique

Myriam Comte

Avec tous mes remerciements à Florian, Malcolm et Romuald.

Table des matières

1 Fonctions de plusieurs variables **5**
- 1.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$ . . . 5
- 1.2 Continuité des fonctions d'un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ 7
- 1.3 Différentiabilité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ . . . 9
  - 1.3.1 Différentielle . . . 9
  - 1.3.2 Propriétés . . . 13
  - 1.3.3 Théorèmes des accroissements finis et d'inversion locale 14
  - 1.3.4 Différentielle d'ordre supérieur . . . 19
  - 1.3.5 Extrema . . . 23
  - 1.3.6 Extrema liés . . . 28

2 Analyse Complexe **33**
- 2.1 Dérivabilité complexe-Holomorphie . . . 33
  - 2.1.1 Définitions . . . 33
  - 2.1.2 Propriétés . . . 35
- 2.2 Théorèmes d'intégration . . . 36
  - 2.2.1 Définitions . . . 36
  - 2.2.2 Intégrale curviligne . . . 38
- 2.3 Résidus . . . 42
  - 2.3.1 Séries de Laurent . . . 42
  - 2.3.2 Théorème des résidus . . . 44

3 Équations différentielles **57**
- 3.1 Le problème de Cauchy . . . 57
  - 3.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . 58
  - 3.1.2 Solutions maximales . . . 59
- 3.2 Équations différentielles d'ordre supérieur . . . 61
- 3.3 Équations différentielles linéaires . . . 63
  - 3.3.1 Équations du premier ordre . . . 63
  - 3.3.2 Équations linéaires à coefficients constants du premier ordre . . . 64
  - 3.3.3 Équations linéaires à coefficients constants du premier ordre avec second membre . . . 65

3.3.4 Équations linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur 66

4 Stabilité des solutions et points singuliers 71
4.1 Stabilité des solutions 71
4.1.1 Définition 71
4.1.2 Systèmes linéaires à coefficients constants 72
4.1.3 Petite perturbation d'un système linéaire 73
4.2 Points singuliers 75
4.2.1 Position du problème 76
4.2.2 Systèmes linéaires en dimension deux 78
4.2.3 Systèmes non linéaires 83

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

La trajectoire d'un mobile, le déplacement du bras d'un robot ou tout autre mouvement, peut être modélisé par une fonction f, qui dépendra de plusieurs paramètres, représentés par des variables réelles et qui sera à valeurs vectorielles, en dimension 3 en général. Dans tout ce chapitre, on considérera une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, où n et p sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.

1.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$

Un des premiers outils dont nous allons avoir besoin, est celui qui nous permettra de mesurer, d'évaluer les distances, de contrôler le mouvement. Pour cela nous allons introduire la notion de norme.

Définition 1.1.1. *L'application $u \mapsto \|u\|$ définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ est une norme si et seulement si elle vérifie*

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \tag{1.1}$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \tag{1.2}$$

$$\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \tag{1.3}$$

Exemples 1.1.2.

1) $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

2) $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

3) $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{Max}} |x_i|$.

Remarque 1.1.3. *Il existe d'autres notions qui permettent de mesurer, ce sont les distances. Nous ne les traiterons pas dans ce cours.*

Dans le cadre de la dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Cela signifie que pour étudier un problème, on peut choisir la norme la plus adaptée pour le traiter. Si on peut contrôler par cette norme, on le pourra aussi pour toutes les autres. En particulier pour les normes précédentes, on vérifie que

Proposition 1.1.4.

$$\|\cdot\|_1 \leq n\|\cdot\|_\infty \leq n\|\cdot\|_2 \leq n\|\cdot\|_1.$$

Définition 1.1.5. *La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ est l'ensemble $B(x_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^n, \|u - x_0\| < r\}$. La boule fermée de centre x_0 et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ est l'ensemble $\overline{B}(x_0, r) = \{u \in \mathbb{R}^n, \|u - x_0\| \leq r\}$.*

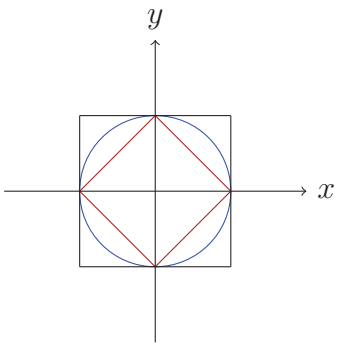


Figure 1 : Boule unité fermée pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 1.1.6. *Une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ est une partie contenue dans une boule de rayon fini.*

Définition 1.1.7. *Une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ est une partie A de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in A$, $\exists r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset A$.*

Exemples 1.1.8.

1) Dans $\mathbb{R}$, $]\alpha, \beta[$ est un ouvert, mais aussi $]-\infty, \alpha[$ et $]\beta, +\infty[$.

2) Dans $\mathbb{R}^n$, $\prod_{i=1}^{n}]\alpha_i, \beta_i[$ est un ouvert.

Définition 1.1.9. *Une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est une partie dont le complémentaire est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.*

Exemples 1.1.10.

1) Dans $\mathbb{R}$, $[\alpha, \beta]$ est un fermé, mais aussi $]-\infty, \alpha]$ et $[\beta, +\infty[$.

2) Dans $\mathbb{R}^n$, $\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]$ est un fermé.

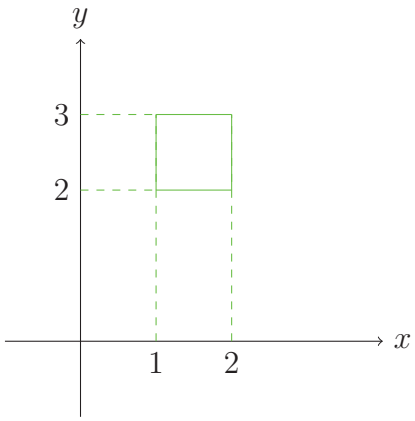


Figure 2 : Fermé $[1,2] \times [2,3]$.

1.2 Continuité des fonctions d'un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Nous allons généraliser la notion de continuité pour les fonctions numériques aux fonctions vectorielles. La difficulté consiste dans le fait que l'on peut approcher un point de l'espace en se déplaçant en ligne droite, en zig-zag , en spirale... La continuité est une notion qui ne doit pas dépendre de la façon dont on approche le point. On va donc se concentrer sur une petite boule autour du point, et regarder ce qui se passe quand le rayon de cette boule devient de plus en plus petit.

Définition 1.2.1. *Soit x_0 un point de U. On a*

$$\lim_{u \to x_0} f(u) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall u \in U, u \neq 0, \\ \|u - x_0\| < r_\varepsilon \Longrightarrow \|f(u) - l\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.2. *Si $f(x_0) = \lim_{u \to x_0} f(u)$, alors f est continue en x_0.*

Remarque 1.2.3. *Si la fonction f est définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors f s'écrit $f = (f_1, \cdots, f_p)$ où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq p$. Pour montrer que f est continue il suffit de vérifier que ses composantes f_i sont continues pour $1 \leq i \leq p$.*

Proposition 1.2.4. *Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$, $g : U \to \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in U$. Si f est continue en x_0 et g est continue en x_0 alors $\lambda g + \mu f$ et fg sont continues en x_0, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Exemples 1.2.5. *Les polynômes à n variables sont continus de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.2.6. *Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $x_0 \in U$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Corollaire 1.2.7. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\sin f$, $\cos f$, e^f sont continues. De même $\frac{1}{f}$ est continue là où f ne s'annule pas et $\sqrt{f}$ est continue là où $f \geq 0$.*

Les démonstrations reposent sur la continuité des fonctions rélles et sont laissées à titre d'exercice pour le lecteur.

Exemples 1.2.8.
1) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+x+y}{y}\sin y & \textit{si} \quad y \neq 0 \\ 1+x & \textit{sinon} \end{cases}$$

est continue.
2) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \textit{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue.

ATTENTION : Ce n'est pas parce qu'une fonction est continue par rapport à chacune de ses variables qu'elle est continue !

Exemples 1.2.9.
La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \textit{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue par rapport à y si on fixe x et par rapport à x si on fixe y. En revanche si on considère les points (x,tx) où $t \in \mathbb{R}$ alors, $f(x,tx) = \frac{2t}{1+t^2}$ qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. La fonction n'est pas continue.

Proposition 1.2.10. *Une fonction linéaire définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue.*

démonstration 1.2.11. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. On a alors*

$$\left\| f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) - f(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \|f(e_i)\| \leq \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq n} \|f(e_i)\| \|(x_- y)\|_1$$

Proposition 1.2.12.
- *Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$, est majorée,minorée et elle atteint ses bornes.*
- *Une fonction continue sur une partie K fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ est uniformément continue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall (u,v) \in K \times K, \|u - v\| < r_\varepsilon \Longrightarrow \|f(u) - f(v)\| < \varepsilon.$$

La démonstration fait appel à des propriétés de compacité et nous l'omettrons.

1.3 Différentiabilité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Si la notion de continuité est lié à la fluidité d'un phénomène, elle n'indique pas si le mouvement est saccadé ou non. Pour cela nous allons introduire la notion de différentielle, qui est la généralisation de la dérivée.

1.3.1 Différentielle

Définition 1.3.1. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable en $x_0 \in U$, s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{avec} \quad & B(x_0, \delta_\varepsilon) \subset U \quad \text{et} \quad \forall h \in B(0, \delta_\varepsilon), \\ & \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh\| < \varepsilon \|h\|. \end{aligned}$$

On peut encore l'écrire $f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh = o(h)$. On note $L = Df(x_0)$.

Proposition 1.3.2. *Quand elle existe, la différentielle en x_0 est unique.*

démonstration 1.3.3. *Supposons qu'il existe deux applications linéaires L_1 et L_2 telles que*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - L_1 h = o(h) \tag{1.4}$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) - L_2 h = o(h). \tag{1.5}$$

En soustrayant les deux expressions, on obtient

$$(L_1 - L_2)h = o(h). \tag{1.6}$$

On considère maintenant un vecteur $h_0 \neq 0$ quelconque de $\mathbb{R}^n$ et soit $t \in \mathbb{R}^n$. Pour t petit, on aura

$$(L_1 - L_2)(th_0) = t(L_1 - L_2)h_0 = o(th_0) = \|th_0\|\varepsilon(th_0), \tag{1.7}$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $\|h\| \to 0$.

En divisant par t et en faisant tendre t vers 0, on a alors

$$(L_1 - L_2)(h_0) = 0. \tag{1.8}$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur h_0 de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $L_1 = L_2$.

Remarque 1.3.4. *Si f s'écrit $f = (f_1, \cdots, f_p)$ où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq p$, il suffit de vérifier que ses composantes f_i sont différentiables pour $1 \leq i \leq p$.*

Définition 1.3.5. *Si f est différentiable en tout point $x_0 \in U$, on dit que f est différentiable sur U.*

Exemples 1.3.6.
1) Les polynômes à n variables sont différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
2) Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable alors $Df(x)h = f'(x)h$, $\forall h \in \mathbb{R}$.
3) Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, f est différentiable et $Df(x_0)h = f(h)$.

Théorème 1.3.7. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.*

démonstration 1.3.8. *Par définition de la différentiabilité, on peut écrire*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + o(h).$$

D'après la proposition(3.4), on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|Lh\| \leq C\|h\|$. Ainsi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq (C + \varepsilon)\|h\|.$$

On en déduit la continuité de f.

La difficulté va consister à trouver cette fonction $L = Df(x_0)$. Pour cela, nous allons faire appel à la notion de dérivée partielle.

Définition 1.3.9. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On appelle dérivée partielle par rapport à la ième variable, la limite, quand elle existe,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n) = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(x_1, \cdot, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \cdot, x_n) - f(x_1, \cdot, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdot, x_n)}{h}.$$

Dans la pratique cela signifie que on gèle toutes les variables x_j pour $j \neq i$ et que l'on dérive par rapport à x_i.

Exemples 1.3.10. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = xy^2$ et cherchons sa dérivée partielle par rapport à x pour toute valeur de (x, y). Pour cela on gèle y et on dérive par rapport x. Cela donne :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2.$$

De même, si on veut calculer la dérivée partielle de f par rapport à y, on gèle la variable y et on dérive par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Théorème 1.3.11. *Si f est différentiable en x_0, alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existe pour $1 \leq i \leq n$ et*

$$Df(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i = \nabla f(x_0) \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

où $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$ est le gradient de f en x_0.

démonstration 1.3.12. *Soit h un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On peut le décomposer dans la base canonique $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$. On a alors*

$$Df(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} h_i Df(x_0)e_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \tag{1.9}$$

par définition de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

On en déduit la proposition suivante

Proposition 1.3.13. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable alors la matrice de $Df(x)$ s'écrit, pour $f = (f_1, \cdots, f_p)$,*

$$J_{f(x_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & . & . & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

C'est la jacobienne de f en x_0.

Dans tout ce cours, les matrices sont considérées dans la base canonique des espaces.

ATTENTION : La réciproque du théorème 1.3.11 est fausse.

Exemples 1.3.14. *La fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admet des dérivées parielles par rapport à x et y en $(0,0)$, mais n'est pas différentiable en $(0,0)$ puisque pas continue.

Théorème 1.3.15. *Si* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ *existe et* $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ *est continue pour* $1 \leq i \leq n$, *alors* f *est est différentiable sur* U. *De plus l'application* $x \mapsto Df(x)$ *est continue sur* U.

démonstration 1.3.16. *Pour simplifier nous donnons la démonstration dans le cas* $n = 2$. *Soit* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. *Nous allons évaluer la quantité*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \tag{1.10}$$

comme la somme des deux termes

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h) - f(x_0 + (0, h_2)) - h_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ &+f(x_0 + (0, h_2)) - f(x_0) - h_2 \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0). \end{aligned}$$

Nous remarquons que la fonction $t \to f(x_0 + (th_1, h_2))$ *est dérivable et que sa dérivée en* t *est égale à* $h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + (th_1, h_2))$. *On peut appliquer la formule des accroissements finis pour les fonctions réelles : il existe* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*

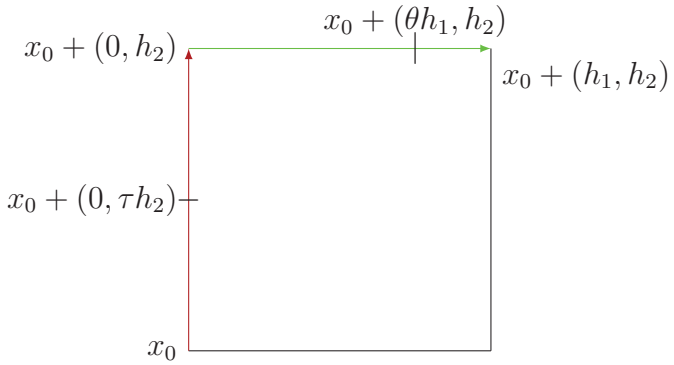
$$f(x_0 + h) - f(x_0 + (0, h_2)) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + (\theta h_1, h_2))$$

Appliquant le même raisonnement à la fonction $t \to f(x_0 + (0, th_2))$, *on obtient l'existence de* $\tau \in]0, 1[$ *tel que*

$$f(x_0 + (0, h_2)) - f(x_0) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + (0, \tau h_2))$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h) - f(x_0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \\ &= h_1 \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + (\theta h_1, h_2)) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \Big) \\ &+h_2 \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + (0, \tau h_2)) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \Big). \end{aligned}$$



Nous allons à présent utiliser la continuité des dérivées partielles :

$$\begin{array}{c} \textit{pour tout} \quad \varepsilon > 0, \quad \textit{il existe} \quad \eta > 0 \quad \textit{tel que} \\ \|h\| < \eta \Longrightarrow \left\| \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + (h_1, h_2)) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right\| < \varepsilon \\ \|h\| < \eta \Longrightarrow \left\| \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + (h_1, h_2)) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \right\| < \varepsilon \end{array}$$

Nous choisissons alors h tel que $\|h\| < \eta$, de ce fait $\|(\theta h_1, h_2)\| < \eta$ et $\|(0, \tau h_2)\| < \eta$ puisque θ et τ sont dans $]0, 1[$. Appliquant les inégalités précédentes, on a

$$\begin{aligned} &\left\| f(x_0 + h) - f(x_0) - h_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) - h_2 \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \right\| \\ &\leq \left\| h_1 \Big(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + (\theta h_1, h_2)) - \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \Big) \right\| \\ &+ \left\| h_2 \Big(\tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + (0, \tau h_2)) - \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \Big) \right\| \\ &< \varepsilon(|h_1| + |h_2|) = \varepsilon \|h\|_1. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la différentiabilité de f.

Définition 1.3.17. *Si f est différentiable sur U et $x \mapsto Df(x)$ est continue sur U, on dit que f est de classe C^1.*

1.3.2 Propriétés

Proposition 1.3.18. *Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : U \to \mathbb{R}^p$. Si f et g sont différentiables alors $\lambda f + \mu g$ l'est pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x)$. De même, fg est différentiable et $D(fg)(x)h = Df(x)hg(x) + f(x)Dg(x)h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.*

Proposition 1.3.19. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$. Soit $x_0 \in U$ tel que f est différentiable en x_0 et g différentiable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

démonstration 1.3.20. *Considérons la quantité*

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)h.$$

Nous allons l'écrire comme la somme des deux termes suivants

$$A = g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(f(x_0 + h) - f(x_0)) \tag{1.11}$$

$$B = Dg(f(x_0))(f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h). \tag{1.12}$$

Soit ε un réel positif quelconque. Il existe un réel δ_1 strictement positif tel que

$$\|h\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| < \frac{\varepsilon}{2}\|h\|. \tag{1.13}$$

D'après la proposition 3.4, il existe $M > 0$ tel que

$$\|h\| < \delta_1 \Rightarrow \|B\| < M\varepsilon\|h\|. \tag{1.14}$$

La fonction g étant différentiable en $f(x_0)$, il existe un réel δ_2 strictement positif tel que

$$\|k\| < \delta_2 \Rightarrow \|g(f(x_0)+k) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))k\| < \frac{\varepsilon}{2}\|k\|. \tag{1.15}$$

Comme f est différentiable, il existe une constante $K > 0$ telle que l'équation (1.13), entraîne

$$\|h\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0)\| < \frac{(K+\varepsilon)}{2}\|h\|. \tag{1.16}$$

On en déduit que

$$\|h\| < \min(\delta_1, \frac{\delta_1}{M}, \frac{\delta_2}{K+\varepsilon}) \Rightarrow \|A+B\| < \varepsilon\|h\|. \tag{1.17}$$

Exemples 1.3.21. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors* $\sin f$, $\cos f$, e^f *le sont aussi. De même $\frac{1}{f}$ l'est là où f ne s'annule pas et $\sqrt{f}$ aussi là où $f > 0$*

1.3.3 Théorèmes des accroissements finis et d'inversion locale

À partir de la connaissance de la différentielle, on pourra contrôler la différence entre deux valeurs de la fonction. Cela permettra par la suite d'avoir des estimations d'erreur dans les mouvements.

Théorème 1.3.22. (Accroissements finis) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable. Soient $x, y \in U$ tels que le segment $\sigma(x,y)$ soit contenu dans U. On a l'inégalité*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \operatorname*{Sup}_{z\in\sigma(x,y)} \|Df(z)\|\|x-y\|.$$

démonstration 1.3.23. *La démonstration de ce théorème repose sur l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions d'une variable. Pour cela, on va utiliser le fait que tout élément de $z \in \sigma(x,y)$ s'écrit sous la forme $z = tx + (1-t)y$ avec $t \in [0,1]$ et introduire la fonction F définie de l'intervalle $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ par $F(t) = f(tx+(1-t)y)$. La fonction f étant différentiable dans U, la fonction F est dérivable dans $]0,1[$ et*

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f\Big(tx+(1-t)y+h(x-y)\Big) - f\Big(tx+(1-t)y\Big)}{h} \\ &= Df\Big(tx+(1-t)y\Big)(x-y). \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions d'une variable,

$$\|F(1) - F(0)\| \leq \operatorname*{Sup}_{t\in]0,1[} \|F'(t)\|. \tag{1.18}$$

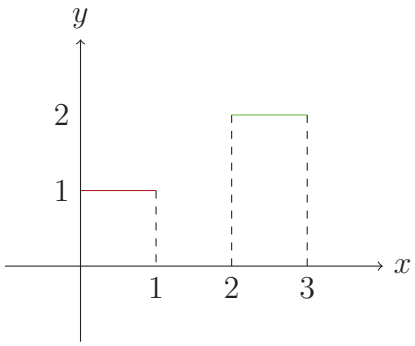
Ce qui permet d'achever la démonstration.

ATTENTION : Il n'y a pas égalité en général.

Exemples 1.3.24. *Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par $f(t) = (t^3, t^2)$. On a alors $f(1)-f(-1) = (2, 0)$ et $f'(t) = (3t^2, 2t)$. Il n'existe pas de point $\theta \in]-1, 1[$ tel que $f'(\theta)$ soit colinéaire à $f(1) - f(-1)$.*

Corollaire 1.3.25. *Si U est un ouvert convexe, i.e. si $x, y \in U$ alors $\sigma(x, y) \subset U$, $Df \equiv 0 \Rightarrow f = constante.$*

L'hypothèse de convexité de U est essentielle. En effet, considérons l'ouvert $]0, 1[\cup]2, 3[$ et la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 2$ si $x \in]2, 3[$.



La différentielle de f est nulle mais f n'est pas constante.

Définition 1.3.26. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Une fonction $f : U \to V$ est appelée difféomorphisme de classe C^1 de U dans V, si elle est bijective de U sur V, de classe C^1 et si f^{-1} est de classe C^1 de V sur U.*

Le théorème suivant donne des conditions qui permettent de revenir à la position de départ après un mouvement. Attention, tout se passe de façon locale.

Théorème 1.3.27. (Inversion locale) *Soient $f : U \to V$ de classe C^1 et $x_0 \in U$. Supposons que $Df(x_0)$ est bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, i.e. $\det J_{f(x_0)} \neq 0$. Il existe alors un voisinage ouvert U' de x_0 tel que $f(U') = V'$ est ouvert et $f_{|U'}$ est un difféomorphisme de classe C^1 de U' dans V'.*

Cela signifie que localement, on peut inverser le mouvement de façon régulière. Avec des hypothèses supplémentaires, on obtient une inversion globale.

Théorème 1.3.28. *Si f est injective, de classe C^1 sur U et si $\det J_f$ ne s'annule pas sur U alors f est un difféomorphisme de classe C^1 de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^p$.*

Ces deux théorèmes sont admis.

Exemples 1.3.29.

1) La fonction $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ admet pour matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est égal à $e^{2x} > 0$, mais $f(0, 2\pi) = f(0, 0)$, donc f n'est pas injective.

2) **Une application à la Robotique**

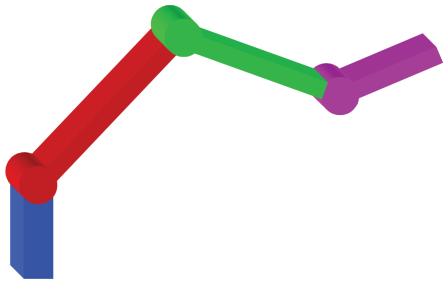


FIGURE 1.1 – Robot 3R

On considère un robot communément appelé 3R (3 liaisons Rotoïdes, ancien nom des liaisons pivots), figure 1.1. C'est un robot série consituté de quatre corps liés entre eux par des liaisons pivots d'axes parallèles. Le robot évolue donc dans un plan.

Les corps sont modélisés par des tiges de longueur l_i, notées S_i pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. On donne $\mathbb{R}_0$ et $\mathbb{R}_T$ des repères orthonormés directs attachés respectivement aux corps S_0 et S_3, voir figure 1.2.

1. *Les repères sont placés sur la figure 1.3.*

   Le vecteur q des paramètres articulaires est alors défini par

   $$q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

   On a un paramètre par articulation.

2. *Le corps terminal se déplace dans le plan $(O_0; \vec{i_0}, \vec{j_0})$ donc 3 paramètres suffisent pour décrire sa position et son orientation. On choisit*

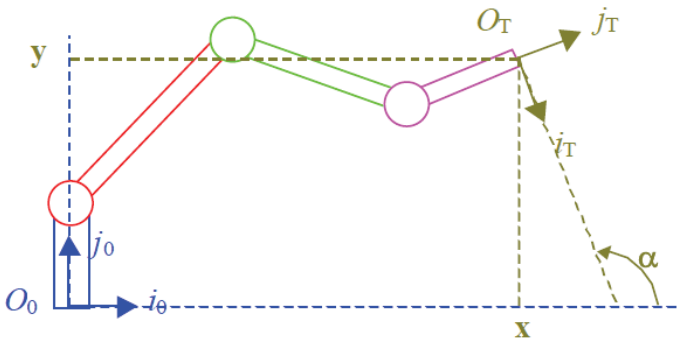


FIGURE 1.2 – Paramètrage opérationnel

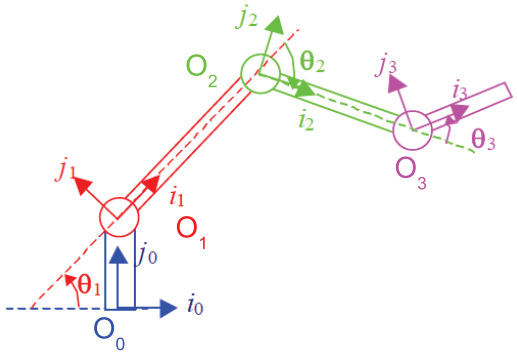


FIGURE 1.3 – Paramètrage articulaire

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} x = \overrightarrow{O_0O_T}.\overrightarrow{i_0} \\ y = \overrightarrow{O_0O_T}.\overrightarrow{j_0} \\ \alpha = (\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{i_T}) = (\overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{j_T}) \end{cases}$$

3. *Le modèle géométrique direct est la relation $X = f(q)$. On peut calculer cette relation composante par composante :*

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{O_0O_T}.\overrightarrow{i_0} \\ &= (\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_T}).\overrightarrow{i_0} \\ &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

De même on trouve

$$y = l_0 + l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Enfin, de façon évidente on a $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. Le modèle géométrique direct est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ l_0 + l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix}$$

On va calculer la matrice jacobienne de ce mouvement

$$\begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 \sin(\alpha) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 \sin(\alpha) & -l_3 \sin(\alpha) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\alpha) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\alpha) & l_3 \cos(\alpha) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où nous avons remplacé $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ par α. Le déterminant de cette matrice est égal à

$$\det J_{f(q)} = l_1 l_2 \sin(\theta_2)$$

qui est non nul pour $\theta_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Dans ce cas le mouvement est localement inversible. On aura donc une solution si on suppose que $\theta_2 \in]0, \pi[$ et une autre si on suppose que $\theta_2 \in]-\pi, 0[$.

Si $\theta_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$, le bras du robot est complètement tendu ou replié, et on ne pourra pas inverser. On peut ici expliciter l'inverse

4. *Le modèle géométrique inverse s'obtient en inversant les trois relations précédentes. On pose $x' = x - l_3 \cos\alpha$ et $y' = y - l_3 \sin\alpha$ alors :*

$$x'^2 + (y' - l_0)^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2(\cos\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

d'où

$$\cos(\theta_2) = \left(\frac{x'^2 + (y' - l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right),$$

c'est pour inverser la fonction $\cos$ que l'on décide si $\theta_2 \in]0, \pi[$ ou $\theta_2 \in]-\pi, 0[$. On aura alors une solution pour un angle ou pour son inverse. La position sera symétrique par rapport à l'horizontale. Par ailleurs on trouve

$$\cos(\theta_1) = \frac{x'(l_1 + l_2 \cos(\theta_2)) + (y' - l_0) l_1 \sin(\theta_2)}{x'^2 + (y' - l_0)^2}$$
$$\sin(\theta_1) = \frac{(y' - l_0)(l_1 + l_2 \cos(\theta_2)) - x') l_1 \sin(\theta_2)}{x'^2 + (y' - l_0)^2}$$

De façon évidente on a : $\theta_3 = \alpha - \theta_1 - \theta_2$. Les deux solutions possibles selon θ_2 correspondent à différents modes d'assemblage : ici bras droit ou bras gauche, voir figure 1.4.

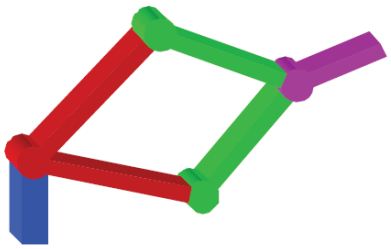


FIGURE 1.4 – Mode d'assemblage

1.3.4 Différentielle d'ordre supérieur

Définition 1.3.30. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable en x_0. Si $x \mapsto Df(x)$ est différentiable en x_0, alors f admet une différentielle d'ordre 2 en x_0. Elle est notée $D^2 f(x_0)$.*

Derrière la simplicité de cette défintion se cache une difficulté. La différentielle de Df en x_0 est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Imaginez ce qui se passe quand on réitère le procédé !

Exemples 1.3.31.
1) Les polynômes à n variables admettent une différentielle d'ordre 2.
2) Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable alors $D^2 f(x) = f''(x)$.
3) Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, f est deux fois différentiable et $D^2 f(x_0) = 0$.

Pour calculer cette différentielle seconde, nous allons introduire les notions de dérivée partielle seconde.

Définition 1.3.32. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On appelle dérivée partielle seconde la limite, quand elle existe,*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_1, \cdots, x_n) =$$
$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \cdot, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \cdot, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \cdot, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdot, x_n)}{h}.$$

C'est le même principe que pour la dérivée partielle : on gèle toutes les variables x_k pour $k \neq i$ et l'on dérive par rapport à x_i la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Exemples 1.3.33. *Reprenons l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = xy^2$ et cherchons ses dérivées partielles secondes. Pour trouver la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial y}$, on gèle y et on dérive par rapport x. Cela donne*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = 2y.$$

De même, si on veut calculer la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à y, on gèle la variable x et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) = 2y.$$

Il manque encore deux dérivées partielles. On a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) = 0,$$

obtenue en gelant y et en dérivant par rapport x la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de façon analogue

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(x,y) = 2x.$$

Dans l'exemple précédent, nous remarquons que les quantités $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ et $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ sont égales. Cela découle de la proposition suivante.

Proposition 1.3.34. *(lemme de Schwarz) Si f possède une différentielle d'ordre 2 en x_0 alors*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Ceci implique en particulier que l'application $D^2 f(x_0)$ est symétrique, i. e. pour tout u, v de $\mathbb{R}^n$ on a

$$D^2 f(x_0)(u,v) = D^2 f(x_0)(v,u). \tag{1.19}$$

ATTENTION : La réciproque du théorème est fausse.

Proposition 1.3.35. *Soit $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction admettant une différentielle d'ordre 2 en x_0. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = D^2 f(x_0)(e_i, e_j) \tag{1.20}$$

En particulier si $u = (u_1, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, \cdots, v_n)$, on a

$$D^2 f(x_0)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) u_i v_j.$$

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on peut écrire cette formule sous forme matricielle. On introduit la matrice hessienne de f au point x_0

$$H_{f(x_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

et pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$D^2f(x_0)(u,v) = (u_1 \quad \cdot \quad u_n) H_{f(x_0)} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = D^2f(x_0)(v,u).$$

Définition 1.3.36. *Si f admet une différentielle d'ordre 2 en tout point x de U et si $x \mapsto D^2f(x)$ est continue sur U, on dit que f est de classe C^2.*

Théorème 1.3.37. *Si f admet en chaque point de U des dérivées partielles premières et secondes continues, alors f est de classe C^2.*

On peut itérer ainsi le processus pour définir les fonctions de classe C^n et de classe C^∞.

Exemples 1.3.38. *Les polynômes de n variables sont de classe C^∞.*

Proposition 1.3.39. *Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : U \to \mathbb{R}^p$ sont deux fois différentiables alors $\lambda f + \mu g$ est deux fois différentiable pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et*

$$D^2(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda D^2f(x) + \mu D^2g(x).$$

De même fg est deux fois différentiable et pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$D^2(fg)(x)(u,v) =$$
$$D^2f(x)(u,v)g(x) + Df(x)u \cdot Dg(x)v + Df(x)v \cdot Dg(x)u + f(x)D^2g(x)(u,v).$$

En général, il sera plus facile de calculer directement le produit fg et d'appliquer la définition sur le résultat.

Proposition 1.3.40. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \mapsto \mathbb{R}^q$. Soit $x_0 \in U$ tel que f est deux fois différentiable en x_0 et g deux fois différentiable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est deux fois différentiable en x_0 et*

$$D^2(g \circ f)(x_0)(u,v) = D^2g(f(x_0))(Df(x_0)u, Df(x_0)v) + Dg(f(x_0))D^2f(x_0)(u,v).$$

Dans la plupart des phénomènes étudiés, on va procéder à une approximation. Ce qui intéresse l'ingénieur n'est pas le comportement exact mais un comportement approché avec une connaissance de la marge d'erreur. Pour cela, nous allons faire des développements limités de la fonction dont l'ordre dépendra de la précision demandée. Malheureusement pour avoir des ordres élevés dans le développement, il faut que la fonction étudiée ait une grande régularité, ce qui n'est pas le cas en général. On privilégiera donc un développement d'ordre deux ou trois dans un voisinage petit, qui assurera la précision souhaitée.

Théorème 1.3.41. (Formule de Taylor) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^2. Soient $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $x + h$ soit contenu dans U. On a l'égalité*

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \frac{1}{2}D^2f(x)(h,h) + o(\|h\|^2).$$

Si f est de classe C^3, alors

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \frac{1}{2}D^2f(x)(h,h) + \frac{1}{6}D^3f(x)(h,h,h) + o(\|h\|^3).$$

démonstration 1.3.42. *Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $\|h\| < \delta_\varepsilon$ alors*

$$\left\| f(x+h) - f(x) - Df(x)h - \frac{1}{2}D^2f(x)(h,h) \right\| < \varepsilon\|h\|^2 \tag{1.21}$$

Définissons

$$F(h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)h - \frac{1}{2}D^2f(x)(h,h). \tag{1.22}$$

La fonction F est bien définie, de classe C^1 dans un voisinage de 0, $F(0) = 0$ et

$$DF(h) = Df(x+h) - Df(x) - \frac{1}{2}\Big(D^2f(x)(h,\cdot) + D^2f(x)(\cdot,h)\Big) \tag{1.23}$$

et comme $D^2f(x)$ est symétrique, on a

$$DF(h) = Df(x+h) - Df(x) - D^2f(x)(h,\cdot) \tag{1.24}$$

La continuité de $DF(h)$ entraîne l'existence de $\delta_\varepsilon > 0$ tel pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ avec $\|u\| < \delta_\varepsilon$, on a

$$\|DF(u)\| < \varepsilon\|u\|.$$

Si $\|h\| < \delta_\varepsilon$, l'inégalité des accroissements finis implique

$$\|F(h)\| = \|F(h) - F(0)\| \leq \operatorname*{Sup}_{u\in\sigma(0,h)} \|DF(u)\|\|h\| \leq \varepsilon\|h\|^2$$

ce qui donne (1.21).

La formule à l'ordre trois s'obtient par récurrence, ainsi que toutes les formules à un ordre plus élevé.

1.3.5 Extrema

On se donne un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et une fonction différentiable $f : U \to \mathbb{R}$. On cherche un point $a \in U$ tel que $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in U$. Cette valeur $f(a)$ serait un minimum de la fonction f. De la même façon, on cherche un point $b \in U$ tel que $f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in U$. Cette fois $f(b)$ serait un maximum de la fonction f.

Théorème 1.3.43. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Si f atteint en a son minimum, ou son maximum, alors $Df(a) = 0$.*

La réciproque est-elle vraie ?

Définition 1.3.44. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable. On appelle point critique de f, un point $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$.*

Définition 1.3.45. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable. On dit que a est un minimum local de f, s'il existe $r > 0$, tel que $B(a, r) \subset U$ et $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in B(a, r)$.*

On dit que b est un maximum local de f, s'il existe $r > 0$, tel que $B(b, r) \subset U$ et $f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in B(b, r)$.

Théorème 1.3.46. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f atteint un minimun local au point a, alors $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)(h, h) \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Si f atteint un maximun local au point b, alors $Df(b) = 0$ et $D^2f(b)(h, h) \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.*

démonstration 1.3.47. *Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Pour t assez petit, $\|th\| < r$. Si $f(a + th) - f(a) \geq 0$ alors pour tout $t > 0$ assez petit, $\frac{f(a+th)-f(a)}{t} \geq 0$, d'où en passant à la limite quand t tend vers 0, $Df(a)h \geq 0$. D'autre part pour $t < 0$, on obtient l'inégalité inverse, ce qui donne l'égalité souhaitée. Pour l'autre sens, on applique la formule de Taylor, pour $th \in B(0, r)$,*

$$\begin{aligned} f(a + th) - f(a) &= Df(a)(th) + \frac{1}{2}D^2f(a)(th, th) + o(\|th\|^2) \\ &= \frac{1}{2}D^2f(a)(th, th) + o(\|th\|^2). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que a est un minimum local, on obtient

$$0 \leq f(a + th) - f(a) = \frac{t^2}{2}D^2f(a)(h, h) + o(\|th\|^2).$$

En divisant l'inégalité par t^2, et en faisant tendre t vers 0, on obtient $D^2f(a)(h, h) \geq 0$.

Théorème 1.3.48. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si a est un point critique de f et si $D^2f(a)(h, h) > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors f admet un minimum local au point a. De même si b est un point critique de f et si $D^2f(b)(h, h) < 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors f admet un maximum local au point b.*

démonstration 1.3.49. *On va se placer dans le cadre d'un fonction définie dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On se place en un point critique de f, $a = (a_1, a_2)$ de U et on veut connaître le signe de $D^2f(a)(h,h)$ avec $h = (h_1, h_2)$. On a*

$$D^2f(a)(h,h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)h_2^2$$

Si $h_2 = 0$, alors pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) > 0$, a est un minimum local et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) < 0$, a est un maximum local.

Dans le cas où $h_2 \neq 0$, on pose $t = \frac{h_1}{h_2}$, on cherche alors le signe de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)t^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)t + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a),$$

qui est un polynôme de degré 2 en t. Le discriminant simplifié est égal à

$$\Delta' = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a))^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a). = -\det H_{f(a)}$$

- *Si $\det H_{f(a)} > 0$, le polynôme n'admet pas de racines réelles, il est du signe de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$:*
  si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) > 0$, a est un minimum local et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) < 0$, a est un maximum local.
- *Si $\det H_{f(a)} < 0$, le polynôme admet des racines réelles : on démontre que tout voisinage de a contient des point α et β tels que :*

  $$f(\alpha) < f(a) < f(\beta).$$

  Le point a est appelé un col.
- *Si $\det H_{f(a)} = 0$, on ne peut pas conclure de façon générale, il faut regarder cas par cas.*

Exemples 1.3.50. *1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3cxy$ avec $c \neq 0$. La fonction f est un polynôme, elle est donc de classe C^∞. Cherchons les points critiques de f.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3cy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3cx.$$

Les points critiques de f sont

$$3x^2 - 3cy = 0$$
$$3y^2 - 3cx = 0.$$

ce qui implique que $x^4 = c^3 x$. *Les solutions sont alors les points* $(0,0)$ *et* (c,c). *Calculons les dérivées partielles secondes.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3c$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

On calcule $\det H_{f(x,y)} = -9c^2 + 36xy$.

En $(0,0)$, $\det H_{f(0,0)} = -9c^2 < 0$, *c'est un col.*

En (c,c), $\det H_{f(c,c)} = 27c^2 > 0$, *si* $c < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c,c) < 0$, (c,c) *est un maximum local, et si* $c > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c,c) > 0$, (c,c) *est un minimum local.*

2)$f(x,y) = x^2y^2$. *La fonction* f *est un polynôme, elle est donc de classe* C^∞. *Cherchons les points critiques de* f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y.$$

Les points critiques de f *sont de la forme* $(x,0)$ *ou* $(0,y)$.

Calculons les dérivées partielles secondes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2.$$

On calcule $\det H_{f(x,y)} = -12x^2y^2$. *Tous les points critiques annulent* $\det H_{f(x,y)}$. *On remarque que la fonction* f *est toujours positive et qu'elle vaut 0 en tous les points critiques de* f. *Tous les points critiques sont donc des minima globaux.*

3)$f(x,y) = x^2y^3$. *La fonction* f *est un polynôme, elle est donc de classe* C^∞. *Cherchons les points critiques de* f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Les points critiques de f sont de la forme $(x, 0)$ ou $(0, y)$.

Calculons les dérivées partielles secondes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y.$$

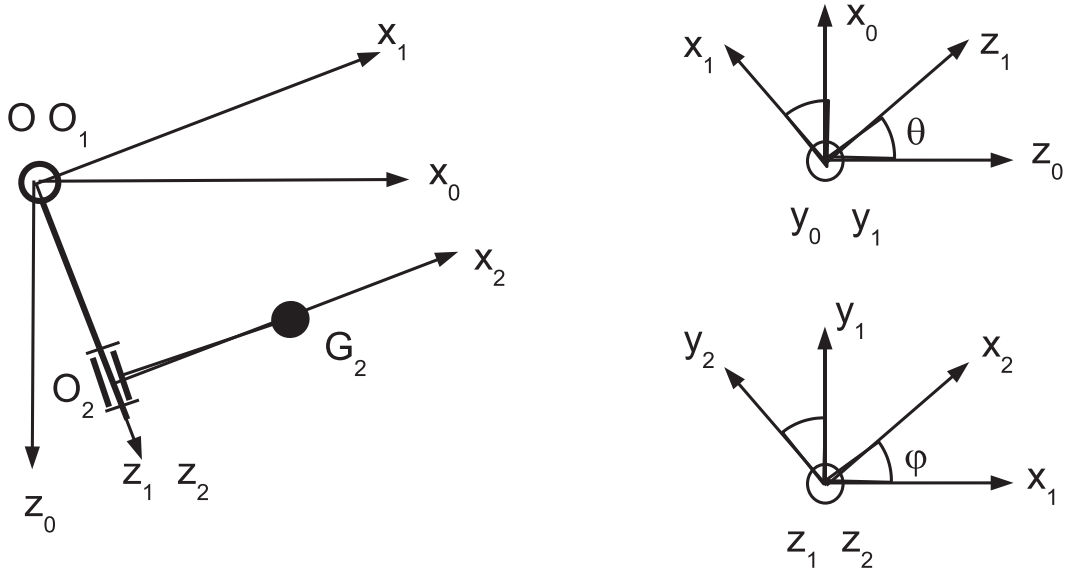
On calcule $\det H_{f(x,y)} = -24x^2y^4$. *Tous les points critiques annulent* $\det H_{f(x,y)}$ *et* f. *Plaçons nous au point* $(0, 0)$, *pour* $\varepsilon > 0$ *petit, on a*

$$f(\varepsilon, -\varepsilon) = -\varepsilon^5 < 0$$
$$f(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^5 > 0.$$

On en déduit que $(0, 0)$ *est un col.*

Le lecteur curieux pourra programmer en matlab ou scilab pour visualiser ces surfaces.

4) On étudie la stabilité d'un système constitué de deux pendules orthogonaux. Ce système est présenté dans la figure ci-dessous.



Le système étudié est constitué :

- *D'une tige $[O_1, O_2]$, de longueur l et de masse négligeable, en liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{y}_0)$ avec le bti.*

– *D'une tige $[O_2, G_2]$, de longueur b dont la masse M est concentrée en G_2, en liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_1)$ avec la tige $[O_1, O_2]$. On donne $\frac{b}{l} = \sqrt{3}$.*

Le potentiel de ce système est décrit par :

$$U(\theta, \varphi) = Mg(l\cos(\theta) - b\cos(\varphi)\sin(\theta)) + C$$

où C est une constante. La fonction U est de classe C^∞.

1. *Les positions d'équilibre du système sont données par les équations*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = Mg(-l\sin(\theta) - b\cos(\varphi)\cos(\theta)) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = Mgb\sin(\varphi)\sin(\theta) = 0. \end{cases}$$

Les points critiques sont donc

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = 0 \\ \sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} -l\sin(\theta) - b\cos(\varphi)\cos(\theta) = 0 \\ \sin(\varphi) = 0. \end{cases}$$

Ce qui nous donne, en utilisant le fait que $\frac{b}{l} = \sqrt{3}$,

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \theta = \pi + k'\pi \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \varphi = 2k'\pi \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \varphi = 2k'\pi \end{cases}$$

$$ou \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \varphi = (2k'+1)\pi \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \varphi = (2k'+1)\pi \end{cases}$$

2. *Calculons les dérivées partielles secondes.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = Mg(-l\cos(\theta) + b\cos(\varphi)\sin(\theta)) \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} = Mgb\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = Mgb\cos(\varphi)\sin(\theta). \end{cases}$$

On peut alors calculer le déterminant de la matrice hessienne

$$\det H_{U(-\frac{\pi}{3}+2k\pi, 2k\pi)} = (-2Mgl)(-\frac{\sqrt{3}}{2}Mgl) > 0$$

et comme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k'\pi) < 0,$$

on en déduit que l'on a un maximum local.

En mécanique on dira que la position d'équilibre est stable si toutes les valeurs propres de la matrice hessienne ont une partie réelle strictement négative. Ce qui est le cas ici.

1.3.6 Extrema liés

Dans ce paragraphe, on cherche les extrema d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ mais dans un ensemble de la forme $\varphi(x) = 0$. Typiquement quand vous devez vous déplacer en voiture d'une ville à une autre et que vous voulez prendre le chemin le plus court, vous devez rester sur la route !

Théorème 1.3.51. *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1, avec $\varphi = (\varphi_1, \cdot, \varphi_p)$. Si f admet en un point a un extremum local sur l'ensemble $X := \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) = 0\}$ et si $D\varphi(a)$ est surjective, il existe $(\lambda_1, \cdot, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que*

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D\varphi_i(a).$$

Définition 1.3.52. *Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.*

ATTENTION : Si $D\varphi(a)$ n'est pas surjective, le résultat est faux.

Exemples 1.3.53. *Soient $f(x, y) = x$ et $\varphi(x, y) = y^2 - x^3$. Si $\varphi(x, y) = 0$, alors $y^2 = x^3$ donc x est positif, et de même f est positive sur l'ensemble $\varphi(x) = 0$. D'autre part $f(0, 0) = 0$, donc f atteint son minimum en $(0, 0)$ mais il n'y a pas de multiplicateurs de Lagrange, car $D\varphi(0, 0) = 0$ et $Df(0, 0) = 1$.*

Application à la mécanique

Le principe de moindre action d'Euler et Lagrange prétend que la dynamique du système est déterminée par un lagrangien

$$L(q, \dot{q}, t)$$

dépendant de la position, de la vitesse et (éventuellement) explicitement du temps. La trajectoire physique est sélectionnée par le fait que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

soit extrémale. Le problème posé est donc de trouver une fonction, ou une famille de fonctions, qui minimise une certaine intégrale. Sa résolution se fait par le calcul des variations ou encore le Calcul variationnel. On le doit à Euler qui en avait compris le fonctionnement et Lagrange qui apporta d'importantes contributions. Nous cherchons donc la fonction $q(t)$ d'une variable réelle t qui minimise (ou maximise) l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt,$$

sous un certain nombre de contraintes exprimées par l'équation

$$\varphi(q(t)) = \Big(\varphi_1(q(t)), ..., \varphi_p(q(t))\Big) = 0 \quad \text{pour} \quad i \in \{1, ..., n\},$$

où φ est de classe C^1. Attention, ici on doit différentier par rapport à la fonction $q(t)$! Calculons DS

$$S(q+h) - S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q+h, \dot{q}+\dot{h}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big(L(q+h, \dot{q}+\dot{h}, t)dt - L(q, \dot{q}+\dot{h}, t)\Big) + \Big(L(q, \dot{q}+\dot{h}, t) - L(q, \dot{q}, t)\Big)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} h_i + o(\|h\|)\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i + o(\|h\|)\Big)dt$$

où

$$\|h\| = \underset{1\leq i\leq n}{\text{Max}}\big(\underset{t\in[t_1,t_2]}{\text{Sup}} h_i(t) + \underset{t\in[t_1,t_2]}{\text{Sup}} \dot{h}_i(t)\big).$$

La différentielle de S est donc

$$DS(h) = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} h_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i\Big)dt$$

On intègre alors par parties

$$DS(h) = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} h_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i\Big)dt + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i)(t_2) - \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i)(t_1).$$

Les extrémités des courbes sur lesquelles on travaille doivent être les mêmes, donc $h(t_1) = h(t_2) = 0$. On en déduit

$$DS(h) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} h_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i\Big)dt.$$

Les contraintes en mécanique ne sont pas données sous forme intégrale. Il faudrait écrire les contraintes sous la forme

$$\Phi(q, \dot{q}) = 0,$$

avec

$$D\Phi(h) = \int_{t_1}^{t_2} D\varphi(h)dt.$$

On applique alors le théorème (1.3.51)

$$DS(h) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_i D\Phi_j(h),$$

et comme les deux intégrales sont égales pour toute fonction h, on en déduit l'égalité des fonctions sous l'intégrale, i. e. pour chaque $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}. \tag{1.25}$$

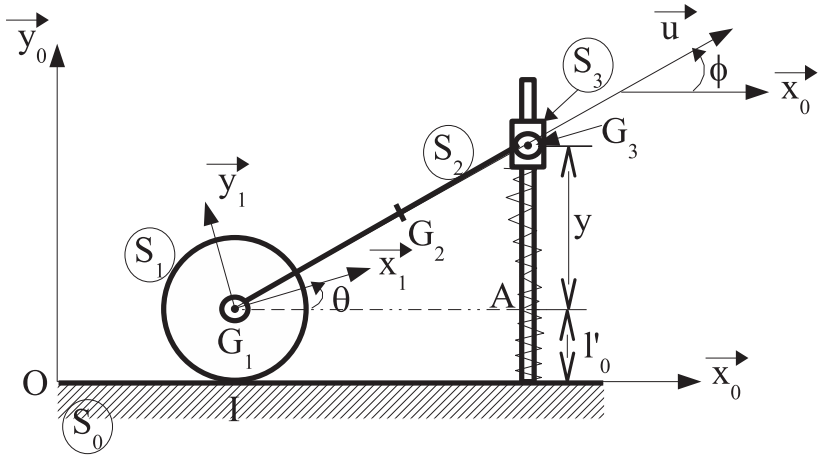
Ce sont les équations de Lagrange sous contrainte. Illustrons-les sur un exemple :

Soit $\mathbb{R}_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère, supposé galiléen, lié au sol (S_0).

Le système étudié (figure ci-dessous) est constitué de trois solides et un ressort :

- (S_1) est un disque homogène de masse m_1, rayon r et de centre G_1. Il roule sans glisser en I sur le sol (S_0). On pose $\overrightarrow{OG_1} = x\vec{x}_0 + r\vec{y}_0$. Le repère $\mathbb{R}_1 = (G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est attaché à (S_1), tel que $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ mesuré autour de $\vec{z}_0$.
- (S_2) est une tige d'extrémités G_1 et G_3, de masse négligeable, de longueur L et de centre G_2. (S_2) est, d'une part en liaison pivot d'axe $(G_1, \vec{z}_0)$ avec (S_1) et d'autre part en liaison pivot d'axe $(G_3, \vec{z}_0)$ avec (S_3). Le repère $\mathbb{R}_2 = (G_1, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ est attaché à (S_2), tel que $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$. On pose $\overrightarrow{G_1G_3} = L\vec{u}$.
- (S_3) est un coulisseau de masse m_3. (S_3) est astreint à se déplacer sur l'axe $(G_3, \vec{y}_0)$

  Un ressort de traction-compression (R),de masse négligeable et de raideur k évite sa chute. La longueur à vide de (R) est l_0. La longueur courante du ressort est notée $l = y + l'_0$.



On remarquera que le système n'a qu'un seul paramètre de configuration indépendant. La contrainte de roulement sans glissement s'écrit

$$\varphi_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \dot{x} + r\dot{\theta} = 0.$$

Les relations cinématiques entre $\dot{x}$ et $\dot{\phi}$ et entre $\dot{y}$ et $\dot{\phi}$ sont

$$\begin{cases} \varphi_2(\dot{x},\dot{y},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \dot{y} - L\dot{\varphi}\cos\varphi = 0 \\ \varphi_3(\dot{x},\dot{y},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Le Lagrangien est égal à

$$L(\dot{x},\dot{y},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 + m_1\dot{x}^2 + m_3\dot{y}^2) - (m_3g + k(l-l_0))\dot{y}.$$

Toutes ces relations seront établies dans le cours de mécanique. On applique les relations (1.25)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \lambda_1 + \lambda_3 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \lambda_2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \lambda_1 r \\ \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \lambda_2(-L\cos\varphi) + \lambda_3(-L\sin\varphi) \end{cases}$$

On calcule les membres de droite et on établit ainsi les équations

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x} = \lambda_1 + \lambda_3 \\ -m_3\ddot{y} + m_3g + k(l-l_0) = \lambda_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1r^2\ddot{\theta} = \lambda_1 r \\ 0 = \lambda_2(-L\cos\varphi) + \lambda_3(-L\sin\varphi), \end{cases}$$

auxquelles on ajoute les trois équations de contrainte, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

Chapitre 2

Analyse Complexe

Dans tout ce chapitre, U désignera un ouvert de $\mathbb{C}$

2.1 Dérivabilité complexe-Holomorphie

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. *Soient $f : U \to \mathbb{C}$ et z_0 un point de U. On a*

$$\lim_{u \to z_0} f(u) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall u \in U \quad u \neq 0, \\ \|u - z_0\| < r_\varepsilon \Longrightarrow \|f(u) - l\| < \varepsilon.$$

Définition 2.1.2. *Si $f(z_0) = \lim_{u \to z_0} f(u)$, alors f est continue en z_0.*

Définition 2.1.3. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en $z_0 \in U$, s'il existe un complexe A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \textit{avec} \quad B(z_0, \delta_\varepsilon) \subset U \quad \textit{et} \quad \forall h \in B(0, \delta_\varepsilon), \\ \|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah\| < \varepsilon \|h\|.$$

On peut encore l'écrire $f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah = o(h)$. On note $A = f'(z_0)$.

Remarque 2.1.4. *La fonction f étant à valeurs dans C, on peut la décomposer en partie réelle et imaginaire, et aussi écrire $z = x + iy$. Dans ce cas*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

où P et Q sont des fonctions de $\tilde{U} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in U\}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1.5. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On a équivalence entre*

i) f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$

ii) P et Q sont différentiables en (x_0, y_0) et satisfont

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \textit{(Conditions de Cauchy).}$$

Dans ce cas $f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$.

démonstration 2.1.6.

- *$i) \Rightarrow ii)$ Le fait que f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ s'écrit*

$$P(x_0 + h, y_0 + k) + iQ(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0) - iQ(x_0, y_0) \quad (2.1)$$
$$= f'(z_0)(h + ik) + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (2.2)$$

Comme $f'(z_0)$ est un nombre complexe, on l'écrit sous la forme

$$f'(z_0) = a + ib.$$

Remplaçons dans (2.1)

$$P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0) + i\big(Q(x_0 + h, y_0 + k) - Q(x_0, y_0)\big) \quad (2.3)$$
$$= ah - kb + i(ak + bh) + o(\sqrt{h^2 + k^2}), \quad (2.4)$$

divisons par $\sqrt{h^2 + k^2}$ et faisons tendre (h, k) vers $(0, 0)$ dans (2.3). En séparant les parties réelles et imaginaires nous obtenons

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0) - ah + bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (2.5)$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{Q(x_0 + h, y_0 + k) - Q(x_0, y_0) - ak - bh}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (2.6)$$

Ce qui donne la différentiabilité de P et Q et les formules pour les dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = a = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -b = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Nous avons ainsi obtenu les conditions de Cauchy et l'expression de $f'(z_0)$.

- *$ii) \Rightarrow i)$ Supposons que P et Q sont différentiables en (x_0, y_0) et qu'elles vérifient les conditions de Cauchy. On peut alors écrire*

$$P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$
$$Q(x_0 + h, y_0 + k) - Q(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$

Posant $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z = x + iy$, il vient

$$f(z_0+z) - f(z_0) = \Big(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)\Big)h + \Big(\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)\Big)ik + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

Ce qui entraîne en utilisant les conditions de Cauchy,

$$f(z_0+z) - f(z_0) = \Big(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)\Big)(h+ik) + o(\sqrt{h^2+k^2}),$$

soit encore

$$f(z_0+z) - f(z_0) = \Big(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)\Big)z + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

Il en découle la dérivabilité de f en z_0 et la valeur de $f'(z_0)$.

Définition 2.1.7. *Si f est dérivable en tout point $z_0 \in U$, on dit que f est holomorphe dans U.*

Exemples 2.1.8.
1) Les polynômes $P(z)$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ et leur dérivée est égale à $P'(z)$.
2) La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$. De même les fractions rationnelles $\frac{P}{Q}(z)$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ privé des racines de Q et

$$\Big(\frac{P}{Q}\Big)'(z) = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}(z).$$

2.1.2 Propriétés

Proposition 2.1.9. *Soient $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : U \to \mathbb{C}$. Si f et g sont dérivables en z_0 alors $\lambda f + \mu g$ l'est pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0)$. De même fg l'est et $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.*

Proposition 2.1.10. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, V un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in U$ tel que f est dérivable en z_0 et g dérivable en $f(z_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en z_0 et $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \circ f'(z_0)$.*

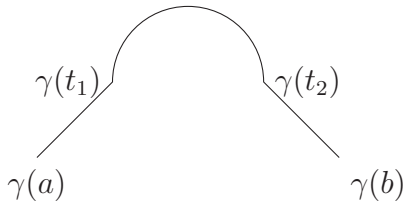
Il faut noter une propriété géométrique importante que vérifie les fonctions holomorphes :

Proposition 2.1.11. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in U$ et $f'(z_0) \neq 0$, alors f conserve les angles avec leur sens au point z_0.*

2.2 Théorèmes d'intégration

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1. *On appelle chemin dans $\mathbb{C}$ une application γ continue d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 par morceaux , i. e. il existe un nombre fini de points $t_1, ..., t_n$ de $]a,b[$ tels que γ est de classe C^1 sur tous les intervalles $]a,t_1[$, $]t_n,b[$ et $]t_i,t_{i+1}[$ pour tout $i = 1, ..., n-1$. Lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que γ est un lacet ou un chemin fermé.*



Définition 2.2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ_1 et γ_2 deux chemins contenus dans U et définis sur $[0,1]$.*

i) On dit que γ_1 est homotope à γ_2 dans U, s'il existe une fonction $\varphi : [0,1]\times[0,1] \to U$ continue et telle que

$$\varphi(t,0) = \gamma_1(t), \quad \varphi(t,1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

ii) Si γ_1 et γ_2 sont des lacets, on dit qu'ils sont homotopes s'ils vérifient i) et

$$\varphi(0,s) = \varphi(1,s) \quad \forall s \in [0,1].$$

L'homotopie correspond à l'idée intuitive que l'on se fait de la déformation continue d'un chemin de U en un autre sans sortir de U.

Exemples 2.2.3.

1) Soit U un ouvert convexe, i.e. tout segment reliant deux points de U est contenu dans U. Si a est un élément de U, tout lacet de U est homotope à a. Il suffit de considérer la fonction $\varphi(t,s) = (1-s)\gamma(t) + sa$.

2)

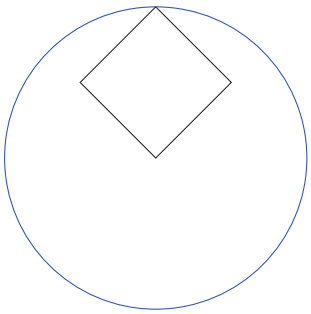


Figure 1 : Lacets homotopes

3)

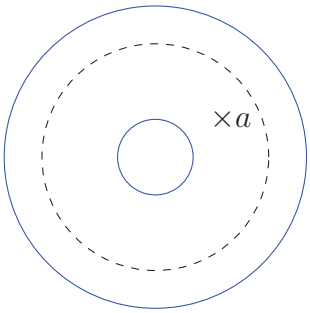


Figure 2 : Le lacet pointillé et le point a ne sont pas homotopes dans l'anneau bleu.

Définition 2.2.4. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.*

1) On dit qu'il est connexe s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

2) On dit qu'il est connexe par arc si tout point $a \in U$ peut-être relié à tout point b de U par un chemin. Il est alors connexe.

3) On dit qu'il est simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet dans U est homotope à un point de U.

4) On dit qu'il est convexe si pour tout point a et b de U, le segment $\sigma(a, b)$ qui relie a à b est contenu dans U.

Exemples 2.2.5.

1) Un disque est simplement connexe.

2) Un disque privé de son centre c n'est pas simplement connexe car si on prend comme lacet un cercle de centre c, il n'est pas homotope à un point. C'est aussi le cas pour un anneau (voir figure 2).

3) Le plan privé d'un nombre fini de demi-droites fermées est simplement connexe (voir figure 3).

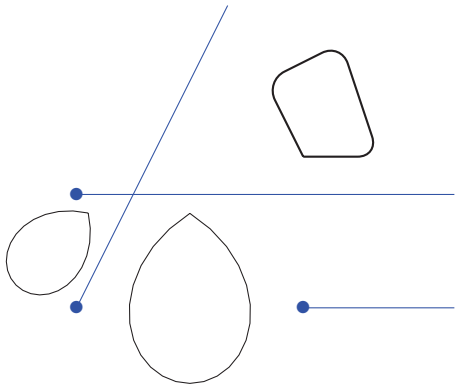


Figure 3 : Chaque lacet est homotope à un point.

4) Le plan privé d'un nombre fini de points n'est pas simplement connexe.

2.2.2 Intégrale curviligne

Définition 2.2.6. *Soient f une fonction complexe continue dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et γ un chemin dans U. On définit la quantité $\int_\gamma f(z)dz$ par l'intégrale de Riemann :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_{t_n}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Théorème 2.2.7. *Soient U un ouvert convexe et γ un lacet dans U. Si f est holomorphe dans U alors*

$$\int_\gamma f = 0. \tag{2.7}$$

Théorème 2.2.8. *Soient U un ouvert connexe de C et f holomorphe dans U. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets homotopes on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

démonstration 2.2.9. *Nous allons donner une démonstration qui repose sur une approche des lacets par des lacets affines par morceaux. Ce genre de démarche d'approximation est utilisée dans beaucoup de problèmes d'Analyse. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets, et $\varphi : [0,1]\times[0,1] \to U$ continue telle que*

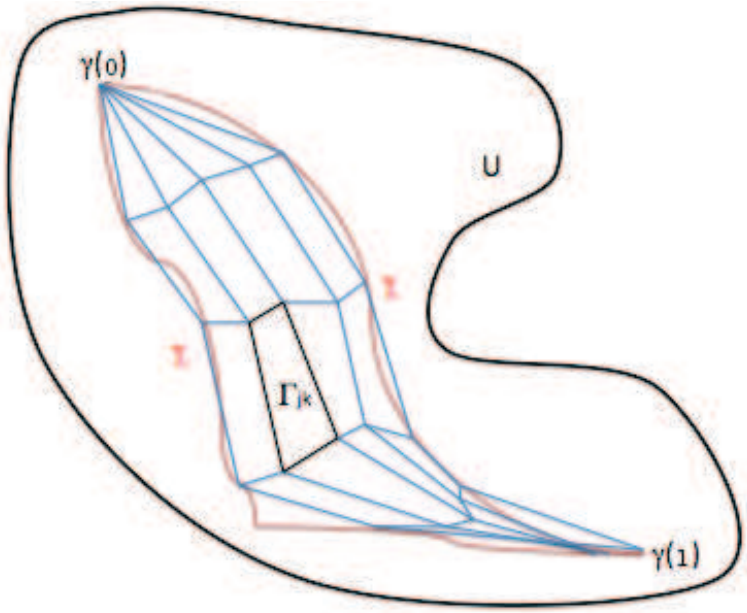
$$\varphi(\cdot,0) = \gamma_1 \text{ et } \varphi(\cdot,1) = \gamma_2.$$

On pose $s_j = \frac{j}{n}$ et $t_j = \frac{j}{n}$ pour $j \in \{0,1,...,n\}$, et on définit l'interpolation affine φ_n de la façon suivante : pour tout $(t,s) \in [t_k, t_{k+1}]\times[s_j, s_{j+1}]$,

$$\begin{aligned}\varphi_n(t,s) = n^2\Big((s_{j+1}-s)(t_{k+1}-t)\varphi(t_k,s_j) + (s_{j+1}-s)(t-t_k)\varphi(t_{k+1},s_j)\\ +(s-s_j)(t_{k+1}-t)\varphi(t_k,s_{j+1}) + (s-s_j)(t-t_k)\varphi(t_{k+1},s_{j+1})\Big)\end{aligned}$$

φ_n est continue et approche uniformément φ. En effet,

$$\begin{aligned}&\|\varphi_n(t,s) - \varphi(t,s)\|\\ \leq\ &\mathrm{Sup}\Big(\|\varphi(t_k,s_j)-\varphi(t,s)\|, \|\varphi(t_{k+1},s_j)-\varphi(t,s)\|,\\ &\|\varphi(t_k,s_{j+1})-\varphi(t,s)\|, \|\varphi(t_{k+1},s_{j+1})-\varphi(t,s)\|\Big)\\ \leq &\sup_{\|(t',s')-(t,s)\|\leq\sqrt{\frac{2}{n}}} \|\varphi(t',s')-\varphi(t,s)\|.\end{aligned}$$



Comme la fonction φ est continue sur un fermé, borné de $\mathbb{R}^2$, elles est uniformément continue. Ce qui implique que φ_n converge uniformément vers φ quand t tend vers $+\infty$. En particulier pour n assez grand, les fonctions φ et φ_n seront assez proches pour que les quadrilatères

$$\Gamma_{jk} = (\varphi(t_k, s_j), \varphi(t_{k+1}, s_j), \varphi(t_{k+1}, s_{j+1}), \varphi(t_k, s_{j+1}))$$

soient tous inclus dans U. On utilise ensuite le théorème (2.2.7) sur le bord $\partial\Gamma_{jk}$ des quadrilatères qui nous donne

$$\int_{\partial\Gamma_{jk}} f = 0.$$

En sommant sur tous les quadrilatères, ce qui est équivalent à sommer j et k de 0 à $n-1$, on obtient alors

$$\int_{\varphi_n(\cdot,0)} f - \int_{\varphi_n(\cdot,1)} f = 0. \tag{2.8}$$

Ensuite, pour n assez grand, la boule de centre $\gamma_1(t_k)$ et de rayon assez petit est contenue dans U, et contient le chemin γ^k réunion du segment $\sigma(\varphi_n(t_{k+1}, 0), \varphi_n(t_k, 0))$ et du chemin $\gamma_1([t_k, t_{k+1}])$. On applique alors théorème (2.2.7) qui conduit à

$$\int_{\gamma^k} f = 0. \tag{2.9}$$

En sommant k de 0 à $n-1$, on obtient

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\varphi_n(\cdot,0)} f = 0.$$

Le même argument montre que

$$\int_{\gamma_2} f - \int_{\varphi_n(\cdot,1)} f = 0. \tag{2.10}$$

En regroupant (2.8), (2.9) et (2.10), on obtient le résultat.

Corollaire 2.2.10. *Si U est simplement connexe et si f est holomorphe dans U, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout lacet dans U.*

Définition 2.2.11. *(Indice d'un lacet) Soit un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ qui n'appartient pas à $\gamma([a,b])$. L'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ est bien définie et on montre que le nombre*

$$Ind(z_0;\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0},$$

est un entier relatif. On l'appelle indice de z_0 par rapport au lacet γ.

démonstration 2.2.12. *Montrons que l'indice est bien un entier. Posons*

$$\varphi(s) = \Big(\exp \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt\Big),$$

par dérivation, nous obtenons

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}.$$

La dérivée de la fonction $\frac{\varphi}{(\gamma-z)}$ est donc nulle. Comme $\varphi(a) = 1$, nous en déduisons que

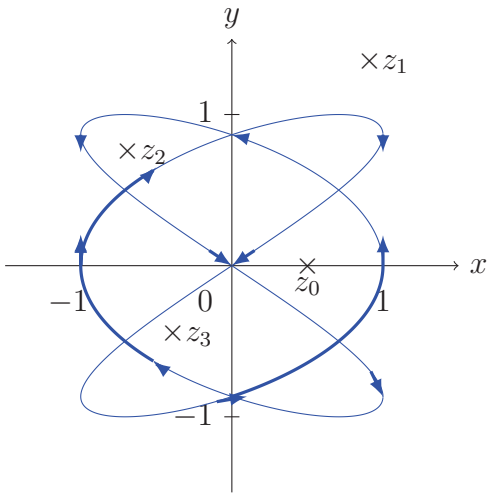
$$\varphi(s) = \frac{\gamma(s)-z}{\gamma(a)-z}.$$

Comme γ est un lacet, $\gamma(a) = \gamma(b)$, d'où $\varphi(b) = 1$. De ce fait l'indice est bien un entier.

La continuité de l'indice entraîne le fait qu'il est constant sur chaque composante connexe.

Intuitivement l'indice correspond à l'idée du nombre de fois que le chemin tourne autour de z_0 dans le sens trigonométrique.

Exemples 2.2.13. *On va donner les indices des points z_0, z_1, z_2 et z_3 par rapport au lacet bleu.*



$$Ind(z_0;\gamma) = 1, Ind(z_1;\gamma) = 0, Ind(z_2;\gamma) = 1 \quad et \quad Ind(z_3;\gamma) = 0.$$

Théorème 2.2.14. *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soient f une fonction holomorphe dans U et γ un lacet contenu dans U. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ qui n'appartient pas à $\overline{\gamma([a,b])}$ on a*

$$Ind(z_0;\gamma)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

C'est la formule intégrale de Cauchy.

démonstration 2.2.15. *On considère la fonction*

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & si \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & si \quad z = z_0. \end{cases}$$

Elle est holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$, on peut donc appliquer le corollaire 2.2.10,

$$\int_\gamma g(z)dz = 0.$$

On remplace g par son expression

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi Ind(z_0;\gamma)f(z_0).$$

Cette formule très importante permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.2.16. *Soit f holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. En tout point z_0 de U il existe une boule ouverte $B(z_0,r) \subset U$ et une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$\forall z \in B(z_0,r), \quad f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n.$$

On dit que f est analytique. En particulier, f est indéfiniment dérivable.

De plus pour tout lacet γ de U entourant z_0 et homotope à un point, on a

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

démonstration 2.2.17. *On considère un disque $\overline{B}(z_0,r) \subset U$ et on prend pour γ le bord de ce disque orienté dans le sens trigonométrique. Soit $z \in B(z_0,r)$. Pour tout s tel que $\|z_0 - s\| = r$, on a*

$$|\frac{z-z_0}{s-z_0}| = |\frac{z-z_0}{r}| < 1,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série

$$\sum_0^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{(n+1)}} = \frac{1}{s-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = \frac{1}{s-z}.$$

On a alors

$$\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{(s-z_0)}\sum_0^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^n}$$

On intègre sur γ et comme la série est uniformément convergente, on peut inverser les signes $\int$ et $\sum$ et intégrer terme à terme. Ce qui donne le résultat.

2.3 Résidus

2.3.1 Séries de Laurent

On suppose que la fonction f est holomorphe dans une couronne circulaire $C(z_0,r_1,r_2) := \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z-z_0| < r_2\}$.

Théorème 2.3.1. *Il existe des nombres complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que*

$$\forall z \in C(z_0,r_1,r_2), \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

C'est le développement en série de Laurent.

Remarque 2.3.2.

– *Les coefficients sont donnés par la formule*

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

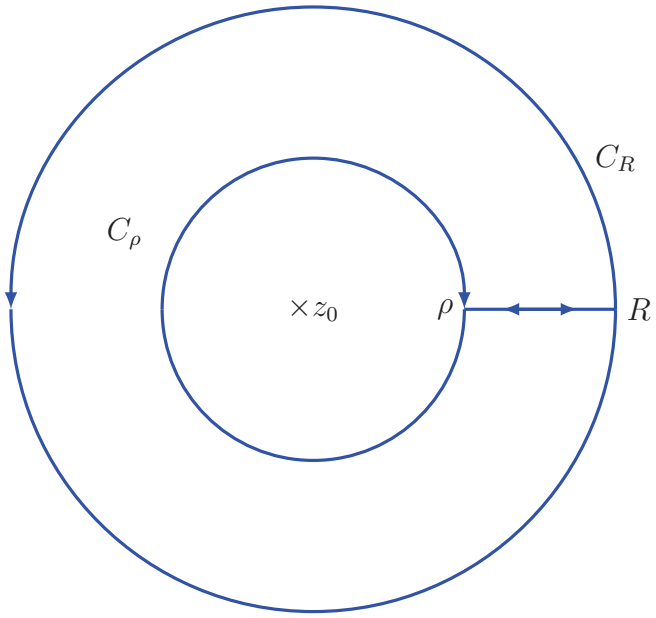
où γ est un lacet dont l'image est un cercle centré en z_0 et contenu dans la couronne $C(z_0,r_1,r_2)$.

– *La partie du développement pour $n < 0$ est appelée partie singulière du développement.*

démonstration 2.3.3. *Fixons deux réels ρ et R tels que*

$$r_1 < \rho < R < r_2.$$

Considérons le lacet $\gamma_{\rho,R}$ suivant : on parcourt le cercle C_R de centre z_0 et de rayon R à partir du point (R, Imz_0) dans le sens trigonométrique, puis le segment reliant le point (R, Imz_0) au point (ρ, Imz_0). À partir de ce dernier point, on parcourt le cercle C_ρ de centre z_0 et de rayon ρ dans le sens inverse du sens trigonométrique, puis, pour finir le segment reliant le point (ρ, Imz_0) au point (R, Imz_0).



La fonction f étant holomorphe dans $C(z_0, r_1, r_2)$ et le lacet $\gamma_{\rho,R}$ étant inclus dedans, on peut appliquer pour tout z tel que $\rho < |z| < R$ le théorème 2.2.14

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\rho,R}} \frac{f(s)}{s-z} ds,$$

l'indice de z par rapport à $\gamma_{\rho,R}$ étant égal à 1.

Comme le segment reliant les points (R, Imz_0) et (ρ, Imz_0) est parcouru dans un sens puis dans l'autre, les deux intégrales s'annulent. Il reste :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s-z} ds.$$

On poursuit la démonstration en développant en série entière

$$\frac{1}{s-z} = \sum_0^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{(n+1)}},$$

dans la première intégrale et

$$\frac{1}{s-z} = \sum_{0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{(n+1)}},$$

dans la seconde. Les deux séries étant uniformément convergentes, on peut inverser les signes $\int$ et $\sum$. On intègre ensuite terme à terme pour obtenir le résultat, en utilisant le fait que deux cercles centrés en z_0 et de rayon contenu dans l'intervalle $]r_1, r_2[$ sont homotopes.

Définition 2.3.4. *On dit que z_0 est un point singulier d'une fonction f si*

i) il existe un disque D centré en z_0 tel f est holomorphe sur $D \setminus \{z_0\}$,

ii) dans le développement en série de Laurent autour de z_0, il existe $n < 0$ tel que $c_n \neq 0$.

Cette dernière condition indique que l'on ne peut pas prolonger f en une fonction holomorphe sur D. Il existe deux sortes de points singuliers :

Définition 2.3.5. *Soit z_0 un point singulier de f.*

i) Il existe $n \leq -1$ tel que $c_n \neq 0$ et tel que $m < n \Rightarrow c_m = 0$. On dit que z_0 est un pôle d'ordre $-n$ de la fonction f. Si $n = -1$ on parle de pôle simple. Dans ces deux cas, la fonction $(z-z_0)^{-n} f(z)$ est holomorphe au voisinage de z_0.

ii) Il existe une infinité de $n < 0$ tels que $c_n \neq 0$. On dit que z_0 est une singularité essentielle de f.

Exemples 2.3.6.

1) Les fractions rationnelles en z admettent des pôles.
2) La fonction $\frac{\sin z}{z}$ n'admet pas de point singulier en 0.
3) La fonction $exp(\frac{1}{z})$ possède une singularité essentielle en 0.

Définition 2.3.7. *Une fonction est méromorphe dans un ouvert U si elle n'admet qu'un nombre fini de pôles $\{z_1, ..., z_n\}$ dans U et qu'elle est holomorphe dans $U \setminus \{z_1, ..., z_n\}$.*

2.3.2 Théorème des résidus

Définition 2.3.8. *Soit z_0 un point singulier de f. On appelle résidu de f au point z_0 le coefficient c_{-1} dans le développement de Laurent autour de z_0, c'est à dire*

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz,$$

où γ est un lacet dont l'image est un cercle centré en z_0 assez petit.

Théorème 2.3.9. *Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $z_0, ..., z_n$ des points distincts de U et f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0, ..., z_n\}$. Si γ est un lacet dont l'image est contenue dans $U \setminus \{z_0, ..., z_n\}$, on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=0}^{n} Ind(z_j, \gamma) Res(f, z_j) = 2i\pi c_{-1}.$$

démonstration 2.3.10. *Pour chaque $z_j, 0 \leq j \leq n$, la fonction f admet un développement de Laurent sur un disque épointé centré en z_j, , i. e. un disque auquel on a enlevé le centre, contenu dans U. On considère la partie singulière de f en z_j*

$$g_{z_j}(z) = \sum_{-\infty}^{-1} c_{z_j,n}(z - z_j)^n,$$

qui est une série uniformément convergente. On pose alors

$$g(z) = f(z) - \sum_{0}^{n} g_{z_j}(z),$$

qui est holomorphe dans $U \setminus \{z_0, ..., z_n\}$. Comme U est simplement connexe, pour tout lacet on a en appliquant le corollaire 2.2.7

$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$

soit encore

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{0}^{n} \int_\gamma g_{z_j}(z)dz.$$

Calculons

$$\int_\gamma g_{z_j}(z)dz = \int_\gamma \sum_{-\infty}^{-1} c_{z_j,n}(z - z_j)^n dz = \sum_{-\infty}^{-1} c_{z_j,n} \int_\gamma (z - z_j)^n dz.$$

Si $n \neq -1$, on a

$$\int_\gamma (z - z_j)^n = 0,$$

car cette fonction admet $\frac{1}{n+1}(z - z_j)^{n+1}$ comme primitive. Il reste

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} = 2i\pi Ind(z_j; \gamma),$$

et, par définition

$$c_{z_j,-1} = Res(f, z_j).$$

D'où le résultat.

Calcul pratique des résidus

1) Cas d'un pôle simple : Supposons que $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont holomorphes au point z_0 avec $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$. Alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

2) Cas d'un pôle multiple : Si z_0 est un pôle d'ordre m de f alors

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \Big(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \Big)_{z=z_0}.$$

Détermination du nombre de pôles et de zéros d'une fonction méromorphe

Proposition 2.3.11. *Soit f une fonction méromorphe non constante dans un ouvert simplement connexe U. On note F l'ensemble de ses pôles et de ses racines. Si γ est un lacet à image dans $U \setminus F$. On a alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_j \in F} n_j Ind(z_j, \gamma),$$

où n_j est l' ordre de multiplicité de $z_j \in F$, positif si on a une racine, négatif si on a un pôle .

démonstration 2.3.12. *Par hypothèse f ne s'annule pas sur $U \setminus F$, elle est donc holomorphe ainsi que sa dérivée dans $U \setminus F$. De ce fait $\frac{f'}{f}$ l'est aussi. On applique le théorème des résidus*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi \sum_{j=0}^{n} Ind(z_j, \gamma) Res(\frac{f'}{f}, z_j).$$

Au voisinage de z_j, on peut écrire

$$f(z) = (z - z_j)^{n_j} g(z)$$

où g est holomorphe et ne s'annule pas dans un voisinage de z_j. On en déduit que

$$f'(z) = n_j (z - z_j)^{n_j - 1} g(z) + (z - z_j)^{n_j} g'(z)$$

et donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{(z - z_j)} + \frac{g'}{g}(z).$$

Le quotient ci-dessus admet z_j comme seul pôle simple. Le résidu en z_j est donc égal à

$$Res(\frac{f'}{f}, z_j) = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) \frac{f'(z)}{f(z)} = n_j.$$

Ce qui achève la démonstration.

Théorème 2.3.13. *Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un ouvert simplement connexe U. On note F l'ensemble de leurs pôles et racines. Soit γ un lacet à image dans $U \setminus F$ parcouru dans le sens trigonométrique. On suppose que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout $z \in \gamma$. Alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans le domaine délimité par γ.*

démonstration 2.3.14. *Si $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout $z \in \gamma$ alors ni f, ni g ne s'annule sur γ, sinon l'inégalité stricte ne serait pas vérifiée. La fonction*

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

est donc méromorphe dans U et sans pôle dans γ.

On a pour tout $z \in \gamma$,

$$|h(z) - 1| = \frac{|f(z) - g(z)|}{|g(z)|} < 1.$$

L'image de γ par h est donc contenue dans le disque ouvert centré en $(1, 0)$ et de rayon 1, et par conséquent ne tourne pas autour de l'origine. On applique la proposition 2.3.11,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0.$$

D'autre part

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)},$$

d'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

et la conclusion provient de l'application de la proposition 2.3.11.

Exemples 2.3.15.

1) Si $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l' équation $z^n = e^{z-\alpha}$ posséde n racines simples dans le disque unité.

On pose

$$f(z) = z^n - e^{z-\alpha} \quad \textit{et} \quad g(z) = z^n,$$

et on considère le bord du disque unité. Pour $|z| = 1$, on a

$$|f(z) - g(z)| = |e^{z-\alpha}| = e^{\cos\theta - \alpha}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$. Comme $\alpha > 1$, on a

$$e^{\cos\theta - \alpha} < 1 = |g(z)|.$$

On applique la proposition 2.3.13, f possède n racines dans le disque unité ouvert. Si l'une de ces racines z_0 nétait pas simple, elle annulerait à la fois f et f', soit

$$z_0^n = e^{z_0-\alpha}$$
$$nz_0^{n-1} = e^{z_0-\alpha}.$$

D'où

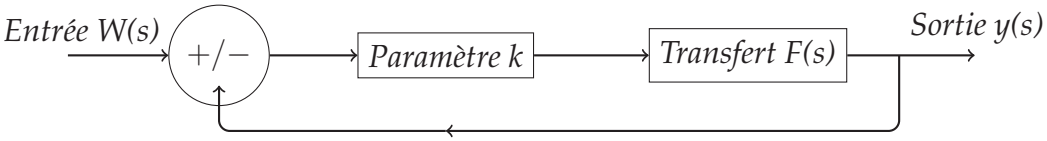
$$z_0^{n-1}(n - z_0) = 0.$$

Cette équation a pour solution $z_0 = 0$, mais 0 n'est pas solution de $z^n = e^{z-\alpha}$.

Si $n \geq 2$, c'est la seule solution.

Si $n = 1$, une autre solution est $z_0 = 1$ qui n'est pas dans le disque ouvert.

2) **Une application à l'Automatique**



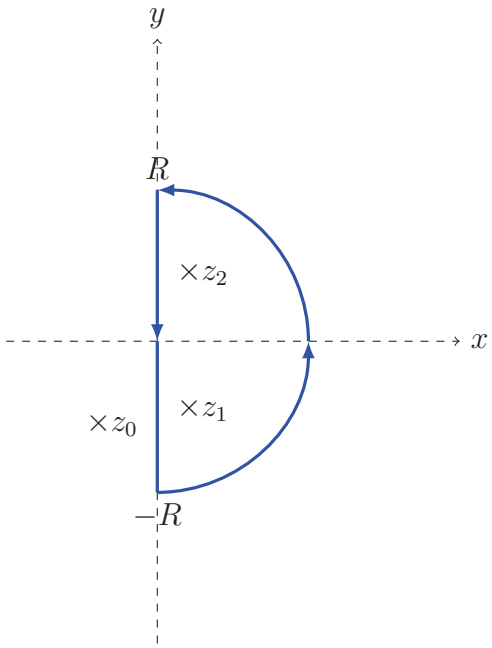
On cherche pour quelle valeur de k le système est stable. Vous verrez en Automatique que l'équation entre la sortie y et l'entrée W s'écrit sous la forme

$$y(z) = \frac{kF(z)}{1 + kF(z)}W(z),$$

où F représente la fonction de transfert et que pour étudier la stabilité du système, il faut connaître le signe des parties réelles des racines de

$$1 + kF(z) = 0.$$

Si l'une des racines a une partie réelle strictemement positive, le système est instable. Nous allons donc déterminer, le nombre de racines à partie réelle positive. Pour cela nous allons considérer le contour γ suivant appelé contour de Nyquist



On va choisir

$$\gamma(t) = \begin{cases} -iRt \quad \textit{pour} \quad t \in [-1,1] \\ R\exp\dfrac{i\pi}{2}(2t+1) \quad \textit{pour} \quad t \in [1,2] \end{cases}$$

On applique la proposition 2.3.11 en posant $f(z) = 1 + kF(z)$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_j \in F} n_j Ind(z_j, \gamma).$$

Calculons

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{-1}^{1} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt + \int_1^2 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt.$$

Faisant le changement de variable

$$\gamma_1(t) = f(\gamma(t)),$$

nous obtenons

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma(t)}dt + \int_1^2 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma(t)}dt,$$

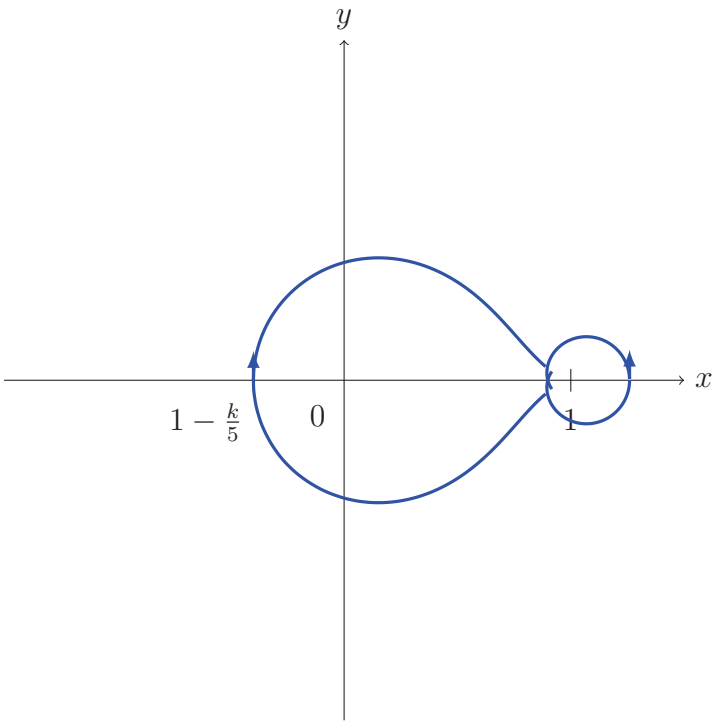
et le membre de droite de cette expression est l'indice de l'origine par rapport au lacet γ_1. *Prenons pour* F *la fonction*

$$F(z) = \frac{1}{(z+1)(z-5)}.$$

Nous cherchons des conditions sur k pour avoir un système stable. Pour R assez grand, il y a un seul pôle de la fonction $f(z) = 1 + kF(z)$ dans le contour de Nyquist. Comme on tourne dans le sens trigonométrique, on a

$$N_0 = -1 + \sum_{\{f(z_j)=0, Re z_j>0\}} n_j Ind(z_j, \gamma),$$

où N_0 est l'indice de l'origine par rapport au lacet γ_1. Si N_0 est égal à -1, alors il n'y aura pas de racine dans le contour de Nyquist. Regardons le contour image γ_1.



Le demi-cercle du contour de Nyquist, qui a pour image le chemin autour du point 1, se concentrera au point 1 quand R va tendre vers $+\infty$. L'intervalle $\sigma(iR, -iR)$ aura pour image le chemin à gauche du point 1 et les deux extrémités vont se rejoindre au point 1 quand R va tendre vers $+\infty$. On constate que l'origine aura un indice -1 par rapport au lacet γ_1, si

$$1 - \frac{k}{5} < 0.$$

Ce qui signifie que le système sera stable si et seulement si $k > 5$.

Trois lemmes utiles

Lemme 2.3.16. *Soit f une fonction continue dans un secteur S de sommet 0*

$$S = \{z \in \mathbb{C}; \theta_0 \leq \arg(z) \leq \theta_1\}.$$

Si Γ est un arc de cercle de centre z_0 et de rayon ρ situé dans S et si

$$\lim_{|z|\to+\infty, z\in S} |zf(z)| = 0,$$

alors

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Lemme 2.3.17. *Soit f une fonction continue dans le secteur S défini précédemment. Si Γ est un arc de cercle de centre 0 et de rayon ρ situé dans S et si*

$$\lim_{|z|\to 0, z\in S} |zf(z)| = 0,$$

alors

$$\lim_{\rho\to 0} \int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Lemme 2.3.18. *Soit f une fonction continue dans un secteur $\mathcal{S}$ de sommet 0*

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}; 0 \le \theta_0 \le \arg(z) \le \theta_1 \le \pi, et \quad \theta_0 \ne \theta_1\}.$$

Si Γ est un arc de cercle de centre z_0 et de rayon ρ situé dans $\mathcal{S}$ et si

$$\lim_{|z|\to+\infty, z\in\mathcal{S}} |f(z)| = 0,$$

alors

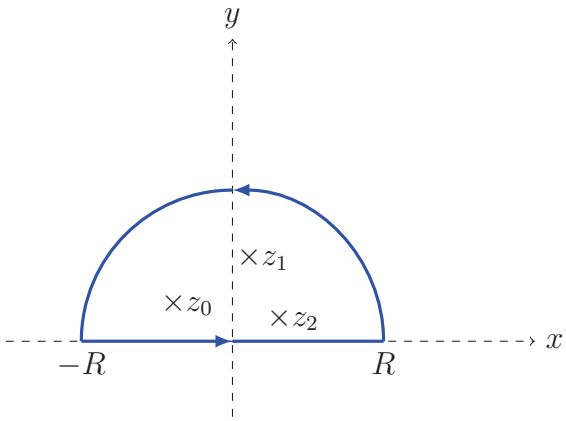
$$\lim_{\rho\to+\infty} \int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0.$$

Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

1) Intégrales de la forme $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

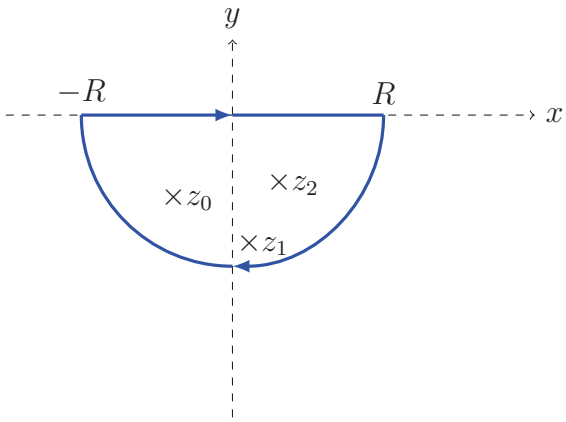
où $\frac{P}{Q}$ est une fonction rationnelle n'ayant pas de pôles réels et $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{xP(x)}{Q(x)} = 0$. Pour calculer l'intégrale I on va intégrer la fonction $R(z)$ sur le bord γ d'un demi-disque de rayon r, situé dans le demi-plan $y \ge 0$ en utilisant le théorème des résidus. En faisant tendre r vers $+\infty$ et en utilisant le lemme (2.3.16), on montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2i\pi \sum_{\{Q(z_j)=0, Imz_j>0\}} Res(\frac{P}{Q}, z_j).$$



Remarque 2.3.19. *En intégrant la fonction $R(z)$ sur le bord γ d'un demi-disque de rayon r, situé dans le demi-plan $y \leq 0$ et en faisant tendre r vers $+\infty$, on montre que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2i\pi \sum_{\{Q(z_j)=0, Imz_j<0\}} Res(\frac{P}{Q}, z_j).$$



Remarque 2.3.20. *Si on remplace $\frac{P}{Q}$ par une fonction f qui admet un nombre fini de points singuliers z_j, aucun n'étant situé sur l'axe réel, et qui vérifie $\lim_{|z|\to+\infty} |zf(z)| = 0$,et si l'intégrale est convergente, on obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j>0\}} Res(f, z_j).$$

Remarque 2.3.21. *Sous les hypothèses de la remarque précédente, mais sans supposer que l'intégrale est convergente, on obtient le résultat sur la valeur principale de l'intégrale, i.e.*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j>0\}} Res(f, z_j).$$

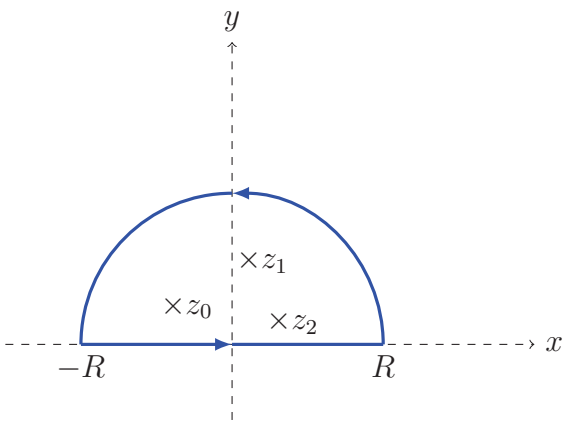
2) Intégrales de la forme $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iqx}dx$ **avec** $q \neq 0$ où f est une fonction holomorphe au voisinage de tout point situé dans le demi-plan $y \geq 0$, sauf peut-être un nombre fini de points et $\lim_{|z|\to+\infty, Imz\geq 0} f(z) = 0$.

On suppose que l'intégrale est convergente

Raisonnons tout d'abord pour $q > 0$.

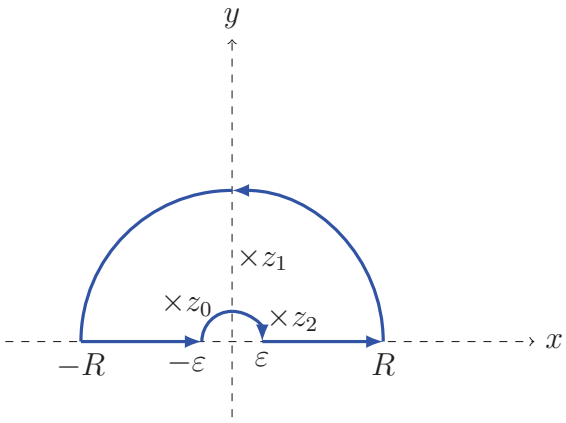
S'il n'y a pas de points singuliers sur l'axe réel, on procède comme dans le cas 1), en utilisant le lemme (2.3.18) et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iqx}dx = 2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j>0\}} Res(fe^{iq\cdot}, z_j).$$



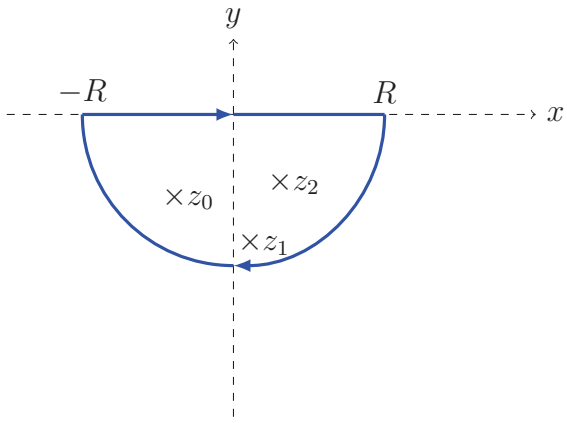
Dans le cas où 0 est un point singulier de f, on le contourne par un petit arc de cercle de centre 0 et de rayon ε dans le demi-plan $y \geq 0$. On obtient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iqx}dx = i\pi Res(f, 0) + 2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j>0\}} Res(fe^{iq\cdot}, z_j).$$



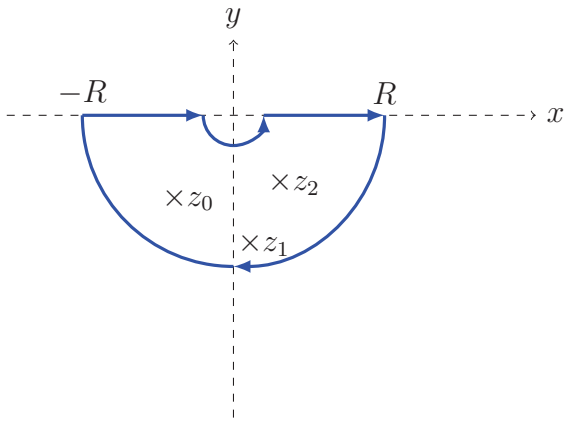
Dans le cas $q < 0$.
On procède de la même façon mais dans le demi-plan $y \leq 0$.
S'il n'y a pas de points singuliers sur l'axe réel on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iqx}dx = -2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j<0\}} Res(fe^{iq\cdot}, z_j).$$



Si 0 est un point singulier de f, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iqx}dx = -i\pi Res(f,0) - 2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j<0\}} Res(fe^{iq\cdot}, z_j).$$



Dans le cas $q = 0$.
Il ne reste à traiter que le cas où 0 est un point singulier de f. Il faut encore utiliser le lemme (2.3.18) et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = i\pi Res(f,0) + 2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j>0\}} Res(f, z_j)$$

$$= -i\pi Res(f,0) - 2i\pi \sum_{\{z_j singulier, Imz_j<0\}} Res(f,z_j).$$

Chapitre 3

Équations différentielles

3.1 Le problème de Cauchy

On considère $t_0 \in \mathbb{R}$, $V_0 \in U$, ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$ et $f : R \times U \to \mathbb{R}^n$. Le problème de Cauchy consiste à trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0, et une fonction $V \to \mathbb{R}^n$ dérivable tels que

$$\begin{cases} V'(t) = & f(t, V(t)) \forall t \in I \\ V(t_0) = & V_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

On dit que l'on a imposé une condition initiale en $t = t_0$.

Remarque 3.1.1. *Lorsque l'on dérive en fonction du temps, on a l'habitude d'écrire* $V'(t) = \dot{V}(t)$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une telle solution sur un petit intervalle autour de t_0, si f satisfait une condition supplémentaire.

Définition 3.1.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $R \times U$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $V_0 \in U$.On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable V, s'il existe $\delta > 0$, $\alpha > 0$ et $K \geq 0$ tels que*

$$]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\times B(V_0, \alpha) \subset \mathbb{R} \times U$$

et

$$\forall t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, \quad \forall V_1, V_2 \in B(V_0, \alpha),$$

on a

$$\|f(t, V_1) - f(t, V_2)\| \leq K \|V_1 - V_2\|.$$

On dit que f est localement lipschitzienne de rapport K.

Exemples 3.1.3.

1) $f(t, V) = kV$ où $k \in \mathbb{R}$.

2) $f(t, V) = g(t)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3) Les fonctions de classe C^1 sur $R \times U$ sont localement lipschitziennes.

3.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 3.1.4. *Soit $f : R \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $V_0 \in U$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une unique application $V :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to U$ de classe C^1 telle que*

$$\begin{cases} V'(t) = & f(t, V(t)) \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\\ V(t_0) = & V_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.5. *L'unicité de V signifie que sur tout autre intervalle $J \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ contenant t_0, il n'y a pas d'autre solution que V.*

Exemples 3.1.6. *Considérons un objet en chute libre qui subit le frottement de l'air. La mécanique Newtonnienne donne l'équation que suit la vitesse v de cet objet, $m\dot{v} = -hv + mg$ où $h > 0$ est le coefficient de frottement, m la masse et g la gravité. D'après la logique du problème $v \geq 0$. Ici $f(t, V) = f(t, v) = \frac{-hv+mg}{m}$, qui est bien continue, et lipschitzienne par rapport à v de rapport $\frac{h}{m}$. On suppose qu'au temps $t = 0$ la vitesse est nulle. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence et l'unicité d'une solution de*

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = & \dfrac{-h}{m} v(t) + g \\ v(0) = & 0 \end{cases}$$

sur un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Dans ce cas il est facile d'expliciter la solution : en effet on peut écrire $v(t) = \frac{gm}{h}(1 - e^{\frac{-h}{m}t})$ et la solution est définie sur tout $I = \mathbb{R}$.

Remarque 3.1.7. *Dans l'exemple précédent, on peut résoudre explicitement l'équation. Ce n'est pas le cas en général. Par exemple $\dot{x}(t) = (t^2 + x(t)^2 - 1)^2 - 4t^2x(t)^2$ et $x(-1) = 0$.*

Proposition 3.1.8. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.1.4, il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\forall \tilde{V_0} \in U$ avec $\left\| \tilde{V_0} - V_0 \right\| < \delta$, l'équation*

$$\begin{cases} V'(t) & = & f(t, V(t)) \\ V(t_0) & = & \tilde{V_0} \end{cases}$$

possède une unique solution sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. De plus $\tilde{V(t)} \to V(t)$ quand $\tilde{V_0}$ tend vers V_0.

Cela veut dire que deux solutions auront un comportement proche si les conditions initiales sont proches, sur un temps qui peut être très court.

Remarque 3.1.9. *ε peut être très petit.*

3.1.2 Solutions maximales

L'unicité locale des solutions pour toute condition initiale se traduit par une unicité globale.

Proposition 3.1.10. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et V_1, V_2 deux solutions de l'équation*

$$\begin{cases} V'(t) = & f(t, V(t)) \forall t \in I \\ V(t_0) = & V_0, \end{cases}$$

où f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors $V_1(t) = V_2(t)$ pour tout $t \in I$.

On déduit du résultat précédent qu'il existe un intervalle maximal $I_{max} :=]t_-, t_+[$ contenant t_0 sur lequel il existe une solution de (I) ayant pour condition initiale V_0 en t_0. Les bornes t_-, t_+ sont des fonctions de (t_0, V_0).

Exemples 3.1.11.

1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & 1 \\ x(t_0) = & x_0. \end{cases}$$

La solution est $x(t) = x_0 + t - t_0$ et l'intervalle maximal est $I_{max} = \mathbb{R}$.

2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & x^2(t) \\ x(t_0) = & x_0. \end{cases}$$

- *Si $x_0 = 0$ alors la solution est $x(t) = 0$ et l'intervalle maximal est $I_{max} = \mathbb{R}$.*
- *Si $x_0 > 0$ alors pour t proche de t_0, x sera proche de x_0 donc strictement positif. Intégrons l'équation*

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)} ds = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0,$$

d'où

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t - t_0.$$

La solution est donc

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + (t_0 - t)x_0}.$$

Il ne peut exister une valeur $\tilde{t}$ dans $]t_-, t_+[$ telle que $x(\tilde{t}) = 0$ car alors la solution serait identiquement nulle. Comme $x_0 > 0$, $x(t) > 0$ sur $]t_-, t_+[$, d'où $1 + (t_0 - t)x_0 > 0$ ce qui est équivalent à $t_0 + \frac{1}{x_0} > t$. On en déduit que $t_- = -\infty$ et $t_+ = t_0 + \frac{1}{x_0}$.

– *Si* $x_0 < 0$ *un raisonnement analogue conduit à* $t_- = t_0 + \frac{1}{x_0}$ *et* $t_+ = +\infty$.

3)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & -2tx^2(t) \\ x(0) = & 1. \end{cases}$$

Pour t *proche de* 0, x *sera strictement positif. Intégrons l'équation*

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)} ds = -\int_0^t 2sds = -t^2,$$

d'où

$$1 - \frac{1}{x(t)} = -t^2.$$

La solution est donc

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

qui est définie sur $\mathbb{R}$.

4)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & 2tx^2(t) \\ x(0) = & 1. \end{cases}$$

Pour t *proche de* 0, x *sera strictement positif. Procédons comme précédemment*

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)} ds = \int_{t_0}^t 2sds = t^2,$$

d'où

$$1 - \frac{1}{x(t)} = t^2.$$

La solution est donc

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Comme $x(t)$ *doit rester positif, on obtient* $I_{max} =]-1, 1[$.

Proposition 3.1.12. *Si* $I_{max} =]t_-, t_+[$ *est tel que* $-\infty < t_- < +\infty$ *ou* $-\infty < t_+ < +\infty$, *alors la solution maximale n'est pas bornée sur* I_{max}.

3.2 Équations différentielles d'ordre supérieur

De manière générale soit $k \in \mathbb{N}^*$, on considère une équation d'ordre k de la forme

$$\frac{d^k}{dt^k}V(t) = f(t, V(t), \cdot, \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}V(t)) \tag{3.3}$$

où f est définie sur $\mathbb{R} \times U \times (\mathbb{R}^n)^{k-1}$ et U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une solution de (3.3) est une fonction $V : I \to \mathbb{R}^n$, I intervalle de $\mathbb{R}$, telle que V est de classe C^k et vérifie (3.3). Dans la pratique on ramène ce type d'équation à des équations d'ordre 1 en introduisant une fonction $W : U \times (\mathbb{R}^n)^{k-1}$ définie par $W = (W_1, \cdot, W_k)$ où $W_i(t) = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}V(t)$, on rappelle que $\frac{d^0}{dt^0}V(t) = V(t)$. On a alors

$$\begin{cases} \dot{W_1} = \dot{V} = W_2 \\ \dot{W_2} = \ddot{V} = W_3 \\ \quad . \\ \quad . \\ \dot{W_{k-1}} = W_k \\ \dot{W_k} = f(t, W_1, \cdot, W_k). \end{cases}$$

L'équation (3.3) est alors équivalente l'équation du premier ordre $\dot{W} = g(t, W)$ où $g : \mathbb{R} \times U \times (\mathbb{R}^n)^{k-1} \to (\mathbb{R}^n)^k$ est définie par $g(t, W) = (W_2, \cdot, W_k, f(t, W_1, \cdot, W_k))$. On vérifie en particulier que si f est localement lipschitzienne par rapport la variable $(W_1, \cdot, W_k)$, alors g aussi. Et réciproquement. On peut alors appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz si f est continue, et si on fixe les conditions initiales. Quelles sont-elles ? Il faut que pour $t = t_0$, on connaisse

$$\begin{cases} W_1(t_0) = V(t_0) = V_0 \\ W_2(t_0) = \dot{V}(t_0) = V_1 \\ \quad . \\ \quad . \\ W_k(t_0) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}V(t_0) = V_{k-1}. \end{cases}$$

Pour une équation d'ordre k il faut donc k données initiales. On a alors le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 3.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R} \times U \times (\mathbb{R}^n)^{k-1} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue localement lipschitzienne par rapport la variable $(W_1, \cdot, W_k)$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, et $(V_0, \cdot, V_{k-1}) \in \times U \times (\mathbb{R}^n)^{k-1}$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une unique application*

$V :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to U$ de classe C^k telle que

$$\begin{cases} \dfrac{d^k}{dt^k}V(t) = f(t, V(t), \cdot, \dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}V(t)) & \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\\ V(t_0) = V_0, \quad \dot{V}(t_0) = V_1, \quad \cdot \quad , \dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}V(t_0) = V_{k-1}. \end{cases}$$

Exemples 3.2.2.

1) L'équation d'un pendule simple est

$$\begin{cases} \ddot{V}(t) = & -\sin V(t) \\ V(0) = & 0 \\ \dot{V}(0) = & V_1, \end{cases}$$

où $V : I \to \mathbb{R}$ représente l'angle avec la verticale. Dans ce cas f est de classe C^∞ par rapport à V et ne dépend pas de t. Les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont donc vérifiées. On pose

$$\begin{cases} W_1(t) = & V(t) \\ W_2(t) = & \dot{V}(t). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{W}_1(t) = & W_2(t) \\ \dot{W}_2(t) = & -\sin W_1(t), \end{cases}$$

et $g(t, W_1, W_2) = (W_2, -\sin W_1)$

Comme on part du point $(0, 0)$, V est supposé petit pour t petit et les physiciens approchent alors le sinus de x par x, d'où le système

$$\begin{cases} \dot{W}_1(t) = & W_2(t) \\ \dot{W_2}(t) = & -W_1(t), \end{cases}$$

pour t petit.

2) Pour

$$\begin{cases} \ddot{V}(t) = & 0 \\ V(0) = & V_0 \\ \dot{V}(0) = & V_1, \end{cases}$$

on pose

$$\begin{cases} W_1(t) = & V(t) \\ W_2(t) = & \dot{V}(t). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{W}_1(t) = & W_2(t) \\ \dot{W}_2(t) = & 0, \end{cases}$$

et si I est un intervalle ouvert, on obtient $W_2 = constante = V_1$, d'où $W_1(t) = V_1(t-t_0) + V_0 = V(t)$.

3.3 Équations différentielles linéaires

3.3.1 Équations du premier ordre

On considère l'équation

$$V'(t) = f(t, V(t)) \quad \forall t \in I. \tag{3.4}$$

Définition 3.3.1. *On parle d'équation linéaire lorsqu'à t fixé, l'application f est linéaire par rapport à V, c'est à dire $U = \mathbb{R}^n$ et*

$$\forall V_1, V_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad f(t, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) = \lambda_1 f(t, V_1) + \lambda_2 f(t, V_2).$$

L'équation (3.4) peut s'écrire sous la forme $V'(t) = f(t, V(t)) = A(t)V(t)$ où $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ est une matrice.

Proposition 3.3.2. *La fonction f est continue et lipschitzienne par rapport V si et seulement si $t \mapsto A(t)$ est continue sur I, i.e. si tous les coefficients de la matrice sont continus.*

Théorème 3.3.3. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $A : \begin{cases} I & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & A(t) \end{cases}$ continue. Alors pour tout $t_0 \in I$ et tout $V_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution $V : I \to \mathbb{R}^n$ de l'équation*

$$\begin{cases} V'(t) & = & A(t)V(t) \quad \forall t \in I \\ V(t_0) & = & V_0. \end{cases}$$

De plus l'ensemble des solutions de l'équation $V'(t) = A(t)V(t)$ sur I forme un espace vectoriel de dimension n.

Remarque 3.3.4. *Sous des hypothèses similaires, on vérifie que l'ensemble des solutions d'une équation linéaire d'ordre k (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) est un espace vectoriel de dimension nk.*

Exemples 3.3.5.

On considère le système suivant. $\begin{cases} \dot{x} & = & tx - y \\ \dot{y} & = & x + ty \end{cases}$, *avec* $\begin{cases} x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$.

Il est s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

et est donc linéaire.

3.3.2 Équations linéaires à coefficients constants du premier ordre

Définition 3.3.6. *L'équation $V'(t) = A(t)V(t)$ est à coefficients constants si $A(t)$ ne dépend pas de t, on la notera A.*

On va considérer l'équation

$$\begin{cases} V'(t) = AV(t) \quad \forall t \in I \\ V(t_0) = V_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

où $V : I \to \mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Définition 3.3.7. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle exponentielle de la matrice A, que l'on note e^A, la matrice égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ où $A^k = A \times \cdot \times A$, le produit de k matrices A.(cette série est convergente)*

Théorème 3.3.8. *Les solutions de (3.5) sont $V(t) = e^{(t-t_0)A}V_0$, elles sont définies sur I.*

Proposition 3.3.9. *Si A est diagonalisable alors il existe $(\lambda_1, \cdot, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible tels que*

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \backslash & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Sous ces hypothèses on a

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \backslash & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dans le cas où A est diagonalisable, si $(\lambda_1, \cdot, \lambda_n)$ sont les valeurs propres et $(e_1, \cdot, e_n)$ les vecteurs propres associés, on peut écrire $V_0 = \sum_{i=1}^n V_0^i e_i$.

Théorème 3.3.10. *Si A est diagonalisable, les solutions de (3.5) sont égales à*

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} (V_0^i e^{\lambda_i (t-t_0)}) e_i.$$

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, le calcul de e^A repose sur la décomposition de Jordan de A.

Exemples 3.3.11.

$$\begin{cases} \dot{x} = & y \\ \dot{y} = & x \\ x(0) = & 1 \\ y(0) = & 0 \end{cases}$$

Dans ce cas $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (-1,1)$. La condition initiale s'écrit $V_0 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ et la solution est $V(t) = (\cosh t, \sinh t)$.

3.3.3 Équations linéaires à coefficients constants du premier ordre avec second membre

On va considérer l'équation

$$\begin{cases} V'(t) = AV(t) + B(t) \quad \forall t \in I \\ V(t_0) = V_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

où $V : I \to \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ continue.

Théorème 3.3.12. *Si $A(t) = A$ pour tout $t \in I$, la solution de (3.6) qui vérifie la condition initiale $V(t_0) = V_0$ s'écrit sous la forme*

$$V(t) = e^{(t-t_0)A} V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

Exemples 3.3.13.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + te^t \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On a le système précédent en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *et* $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix}$. *On a* $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$, *d'où*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} V_0 + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cosh(t-s) & \sinh(t-s) \\ \sinh(t-s) & \cosh(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ se^s \end{pmatrix} ds,$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} V_0 + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t(t-1)e^t + \sinh t \\ t(t+1)e^t - \sinh t \end{pmatrix}.$$

3.3.4 Équations linéaires à coefficients constants d'ordre supérieur

sans second membre

On considère $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \cdot, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. On veut trouver $y : I \to \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$ qui vérifie

$$\frac{d^k}{dt^k}y(t) + a_{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}y(t) + \cdot + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = 0. \tag{3.7}$$

D'après ce qui précéde, on peut se ramener à une équation du premier ordre sur $\mathbb{R}^n$, linéaire à coefficients constants. L'espace vectoriel des solutions est donc de dimension k. En pratique il est plus rapide de rechercher directement les solutions de (3.7) de la forme $e_m(t) = e^{mt}$. En reportant dans (3.7), on voit que e_m est solution si et seulement si m vérifie

$$P(m) = m^k + a_{k-1}m^{k-1} + \cdot + a_1 m + a_0 = 0.$$

Ce polynôme P est appelé polynôme caractéristique de l'équation. La fonction e_m est solution si et seulement si m est racine de P. Il y a alors deux cas

1) les racines de P sont simples alors $P(m) = \prod_{i=1}^{k}(m - m_i)$ et les m_i sont tous distincts. La famille $\{e_{m_i}\}_{1 \le i \le k}$ est une famille libre de solutions de (3.7), et donc c'est une base. Ainsi toute solution de (3.7) s'écrit $x(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e^{m_i t}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour $1 \le i \le k$.

2) P admet des racines multiples $P(m) = \prod_{i=1}^{l}(m - m_i)^{r(i)}$ avec $r(i) \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{i=1}^{l} r(i) = k$. On montre alors que les fonctions $f_{i,p}(t) = t^p e^{m_i t}$ pour $0 \le p \le r(i)-1$ et $1 \le i \le l$ sont des solutions de (3.7). On vérifie que $\{f_{i,p}\}_{0 \le p \le r(i)-1, 1 \le i \le l}$ est une base.

Exemples 3.3.14.

1)

$$y'' - y = 0.$$

Le polynôme caractéristique est $P(m) = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$*. Les solutions sont donc* $y(t) = ae^t + be^{-t}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

2)

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Dans ce cas $P(m) = m^3 - m^2 - m + 1 = (m-1)^2(m+1)$*. Les solutions sont de la forme* $y(t) = ae^{-t} + (bt + c)e^t$*, avec* $a, b, c \in \mathbb{R}$*.*

3)

$$y'' + y = 0.$$

On a $P(m) = m^2 + 1$*, les racines sont complexes ! On travaille dans* $\mathbb{C}$*,* $y(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$*. Mais* $y(t)$ *est réel, il faut donc que* $\beta = \overline{\alpha}$*. Si* $\alpha = a + ib$*, on obtient alors* $y(t) = 2a\cos t - 2b\sin t$*. La forme générale de la solution est donc* $y(t) = A\cos t + B\sin t$*, avec* $A, B \in \mathbb{R}$*.*

4)

$$y'' + y' + y = 0.$$

On a $P(m) = m^2 + m + 1$ *et les racines sont* $m = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$*. Un calcul analogue à celui de l'exemple précédent nous conduit à* $y(t) = e^{\frac{-t}{2}}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$*. De façon identique si le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées* $a \pm ib$*, avec* $a, b \in \mathbb{R}$*, une solution sera de la forme* $y(t) = e^{at}(A\cos bt + B\sin bt)$ *avec* $A, B \in \mathbb{R}$*.*

avec second membre

On considère $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \cdot, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. On veut trouver $y : I \to \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) qui vérifie

$$\frac{d^k}{dt^k}y(t) + a_{k-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}y(t) + \cdot + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = b(t), \tag{3.8}$$

avec $b : I \to \mathbb{R}$ continue. On commence par résoudre l'équation sans second membre, que l'on appelle équation homogène. Soit $(v_1, \cdot, v_k)$ une base de solutions de l'équation sans second membre. On sait que l'on peut mettre (3.8) sous forme d'un système du premier ordre en posant

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \dot{y_0} = y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y_{k-2}} = y_{k-1} \\ \dot{y_{k-1}} = -(a_0 y_0 + \cdot + a_{k-1} y_{k-1}) + b(t). \end{cases}$$

On peut écrire ce système sous la forme $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \cdot \\ y_{k-2} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Le système homogène $Y' = AY$ admet

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ v_1^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , V_k = \begin{pmatrix} v_k \\ \cdot \\ v_k^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

comme base de solutions.($v^{(i)}$ est la dérivée ième de v) On cherche alors une solution du système $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ de la forme

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) V_i(t).$$

Comme $V_i'(t) = AV_i(t)$, il vient

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) V_i'(t) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i'(t) V_i(t) = AY(t) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i'(t) V_i(t).$$

En identifiant avec le système, il faut choisir les α_i' tels que $\sum_{i=1}^k \alpha_i'(t)V_i(t) = B(t)$, i.e.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i'(t)v_i(t) = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i'(t)v_i'(t) = & 0 \\ & \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i'(t)v_i^{(k-2)}(t) = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i'(t)v_i^{(k-1)}(t) = & b(t). \end{cases}$$

Ce système permet de calculer $\alpha_i'(t)$ pour $1 \leq i \leq k$ puis en intégrant, $\alpha_i(t)$ pour $1 \leq i \leq k$.

La solution générale de (3.8) est la somme d'une solution particulière avec la solution générale de l'équation homogène.

Exemples 3.3.15. *On considère l'équation*

$$y'' + 4y = \tan t, \quad \textit{avec} \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

L'équation homogène est

$$y'' + 4y = 0$$

dont une base de solutions est $(\cos 2t, \sin 2t)$.

On cherche la solution sous la forme $y(t) = \alpha_1(t)\cos 2t + \alpha_2(t)\sin 2t$. *on résoud le système précédent et on obtient*

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = -\sin^2 t \\ \alpha_2'(t) = \dfrac{1}{2}(\sin 2t - \tan t). \end{cases}$$

On choisit alors les primitives

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = -\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2t \\ \alpha_2(t) = -\dfrac{1}{4}\cos 2t + \dfrac{1}{2}\ln(\cos t). \end{cases}$$

La solution est donc, après avoir regroupé les termes,

$$y(t) = -\frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\ln(\cos t)\sin 2t + \alpha_1 \cos 2t + \alpha_2 \sin 2t,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Chapitre 4

Stabilité des solutions et points singuliers

On se propose d'étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle losque le temps t tend vers l'infini.

4.1 Stabilité des solutions

4.1.1 Définition

On considère $t_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 \in U$, ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$ et $f : R \times U \to \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$(C_{z_0}) \left\{ \begin{array}{rcll} V'(t) & = & f(t, V(t)) & \forall t \in I \\ V(t_0) & = & z_0 & \end{array} \right. ,$$

et on suppose que la solution existe sur $[t_0, +\infty[$. On va étudier ce qui se passe quand on fait varier la condition initiale.

Définition 4.1.1. *Soit $V(t, z)$ la solution maximale de (C_z) telle que $V(t_0, z) = z$. On dira que la solution $V(t, z_0)$ est stable s'il existe une boule $B(z_0, r) \subset U$ et une constante $C \geq 0$ telles que*

i) $\forall z \in B(z_0, r)$, $t \mapsto V(t, z)$ *existe sur* $[t_0, +\infty[$,

ii) $\forall z \in B(z_0, r)$ *et* $t \geq t_0$, *on a*

$$\|V(t, z) - V(t, z_0)\| \leq C.$$

La solution $V(t, z_0)$ est asymptotiquement stable si elle vérifie

i) $\forall z \in B(z_0, r)$, $t \mapsto V(t, z)$ *existe sur* $[t_0, +\infty[$,

ii') $\exists z \in B(z_0, r)$ *et* $\gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *continue avec* $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 0$*, telles que* $\forall z \in B(z_0, r)$ *et* $t \geq t_0$*, on a*

$$\|V(t, z) - V(t, z_0)\| \leq \gamma(t).$$

Exemples 4.1.2.

1) $y' = ky^2$ *avec* $k < 0$ *et* $y_0 > 0$*. On a* $y(t) = \frac{y_0}{1-k(t-t_0)y_0}$ *d'où*

$$\left|y(t) - \tilde{y(t)}\right| \leq \frac{|y_0 - \tilde{y_0}|}{|1 - k(t - t_0)y_0||1 - k(t - t_0)\tilde{y_0}|}.$$

Comme $t \geq t_0$ *et* $k < 0$ *la solution est stable.*

2) $y' = -y$*, alors* $y(t) = y_0 e^{-t}$ *et*

$$\left|y(t) - \tilde{y(t)}\right| \leq |y_0 - \tilde{y_0}|e^{-t}.$$

La solution est asymptotiquement stable.

4.1.2 Systèmes linéaires à coefficients constants

On considère le système
$Y' = AY$ avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On sait que $Y(t, z) = e^{(t-t_0)A}z$ et donc $Y(t, z) - Y(t, z_0) = e^{(t-t_0)A}(z - z_0)$. La stabilité de la solution est donc liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ quand $t \to +\infty$.

- n=1 alors $A = a \in \mathbb{C}$ et $\left|e^{(t-t_0)a}\right| = e^{(t-t_0)\Re a}$. Les solutions sont
  1. stables si et seulement si $\Re a \leq 0$
  2. asymptotiquement stables si et seulement si $\Re a < 0$.
- n quelconque
  1. si A est diagonalisable, on se ramène par changement de base à

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \backslash & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont alors $y_i(t, z) = z_i e^{\lambda_i(t-t_0)}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $z = (z_i)_{1\leq i\leq n}$. Les solutions sont

- stables si et seulement si $\Re(\lambda_i) \leq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$,
- asymptotiquement stables si et seulement si $\Re(\lambda_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

2. si A n'est pas diagonalisable, on peut la trianguler par blocs. Sur chaque bloc on a

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdot & \star \\ 0 & \lambda & \cdot & \star \\ \cdot & \cdot & \backslash & \star \\ 0 & \cdot & \cdot & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N,$$

où N est nilpotente i.e. $N^n = 0$. Alors

$$e^{(t-t_0)B} = e^{(t-t_0)\lambda I} e^{(t-t_0)N} = e^{(t-t_0)\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} N^k.$$

Les coefficients de $e^{(t-t_0)B}$ sont tous des produits de $e^{(t-t_0)\lambda}$ par des polynômes de degré inférieur à n.
- si $\Re(\lambda) < 0$, les coefficients tendent vers 0,
- si $\Re(\lambda) > 0$, les modules des coefficients tendent vers $+\infty$,
- si $\Re(\lambda) = 0$ alors $\left|e^{(t-t_0)\lambda}\right| = 1$ et $e^{(t-t_0)B}$ n'est pas bornée.

On en déduit :

Théorème 4.1.3. *Soient $\lambda_1, \cdot, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors les solutions de $Y' = AY$ sont*
- *stables si et seulement si, soit $\Re(\lambda_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, soit $\Re(\lambda_i) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable,*
- *asymptotiquement stables si et seulement si $\Re(\lambda_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

4.1.3 Petite perturbation d'un système linéaire

On considère le système
$(P) \quad Y' = AY + g(t, Y)$ où $g : [t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Théorème 4.1.4. *Soient $\lambda_1, \cdot, \lambda_n$ les valeurs propres de A. On suppose que $\Re(\lambda_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. S'il existe $k : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue avec $\lim_{t\to+\infty} k(t) = 0$, telle que $\forall Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall t \geq t_0$, on a*

$$\|g(t, Y_1) - g(t, Y_2)\| \leq k(t)\|Y_1 - Y_2\|,$$

alors toute solution de (P) est asymptotiquement stable.

démonstration 4.1.5. *On étend le système à $\mathbb{C}^n$ en posant par exemple $\tilde{g}(t,Y) = g(t,\Re(Y))$. Dans la suite, nous nous plaçons dans $\mathbb{C}^n$. Il existe alors une base $(e_1,...,e_n)$ dans laquelle A se met sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Posons $\tilde{e}_j = \varepsilon^j e_j$ avec $\varepsilon > 0$ petit. Il vient

$$\begin{aligned} A\tilde{e}_j &= \varepsilon^j(a_{1j}e_1 + ... + a_{j-1j}e_{j-1} + \lambda_j e_j) \\ &= \varepsilon^{j-1}a_{1j}\tilde{e}_1 + ... + \varepsilon a_{j-1j}\tilde{e}_{j-1} + \lambda_j\tilde{e}_j, \end{aligned}$$

de sorte que dans la base $(\tilde{e}_1,...,\tilde{e}_n)$, les coefficients diagonaux peuvent être rendus arbitrairement petits. Pour simplifier nous gardons la notation a_{ij} pour ces termes non diagonaux. On supposera donc que $|a_{ij}| \leq \varepsilon$ et on pourra choisir ε aussi petit qu'on veut. Considérons deux solutions $Y(t,Z)$ et $Y(t,Z_0)$:

$$\begin{aligned} Y'(t,Z) &= AY(t,Z) + g(t,Y(t,Z)) \\ Y'(t,Z_0) &= AY(t,Z_0) + g(t,Y(t,Z_0)) \end{aligned}$$

et évaluons la différence

$$D(t) = Y(t,Z) - Y(t,Z_0).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} D'(t) &= AD(t) + g(t,Y(t,Z)) - g(t,Y(t,Z_0)), \\ \text{avec } &\|g(t,Y(t,Z)) - g(t,Y(t,Z_0))\| \leq k(t)\|D(t)\|. \end{aligned}$$

Nous allons majorer la quantité

$$N(t) = \|D(t)\|^2.$$

Nous avons

$$N'(t) = D'(t)\overline{D(t)} + D(t)\overline{D'(t)} = 2\Re(\overline{D}(t)AD(t)) + 2\Re\Big(\overline{D}(t)(g(t,Y(t,Z)) - g(t,Y(t,Z_0)))\Big).$$

On peut majorer le dernier terme de la somme par

$$2\|D(t)\|k(t)\|D(t)\| = 2k(t)N(t)$$

Pour le premier terme de la somme, on a

$$\overline{D}(t)AD(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |d_j|^2 + \sum_{i<j} a_{ij}\overline{d_i(t)}d_j(t),$$

de sorte que

$$\Re(\overline{D}(t)AD(t)) \leq \sum_{j=1}^{n} \Re(\lambda_j)|d_j|^2 + \sum_{i<j} |a_{ij}|N(t).$$

Comme $\Re(\lambda_j) < 0$ *et* $|a_{ij}| < \varepsilon$*, on choisit* ε *assez petit pour que*

$$\Re(\overline{D}(t)AD(t)) \leq -c\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2 = -cN(t),$$

où $c > 0$*. On remarque que* $N(t)$ *ne peut s'annuler que si les deux solutions coïncident identiquement. On obtient alors*

$$\begin{aligned} N'(t) &\leq -2cN(t) + 2k(t)N(t), \\ \frac{N'(t)}{N(t)} &\leq -2c + 2k(t), \\ ln\Big(\frac{N(t)}{N(t_0)}\Big) &\leq -2\int_{t_0}^{t} (c - k(s))ds, \\ N(t) \leq \|Z - Z_0\|^2 \exp\Big(-2\int_{t_0}^{t} (c - k(s))ds\Big), \end{aligned}$$

car $N(t_0) = \|Z - Z_0\|^2$*. En prenant la racine carrée, on obtient*

$$\|Y(t, Z) - Y(t, Z_0)\| \leq \gamma(t)$$

avec

$$\gamma(t) = \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} (c - k(s))ds\Big)\|Z - Z_0\|$$

Comme

$$\lim_{s\to+\infty} \Big(c - k(s)\Big) = c,$$

l'intégrale diverge vers $+\infty$ *et* $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 0$*. Ce qui montre que les solutions sont asymptotiquement stables.*

4.2 Points singuliers

On va se placer dans le cas de systèmes autonomes, c'est à dire que la fonction f du second membre ne dépend pas de t.

4.2.1 Position du problème

On suppose données des fonctions f_i pour $1 \leq i \leq n$ de classe C^1 dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On considère le système différentiel associé

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f_1(x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ x_n'(t) & = & f_n(x_1(t), ..., x_n(t)). \end{array} \right.$$

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, en posant $f = (f_1, ..., f_n)$, on sait que par tout point

$$M_0 = (x_1(t_0), ..., x_n(t_0))$$

de $\mathbb{R}^n$ passe une unique solution. L'ensemble des points $(x_1(t), ..., x_n(t))$ est une courbe intégrale du système. On cherche à décrire l'allure des solutions au voisinage d'un point M_0 donné.

– Cas 1

$$\begin{pmatrix} f_1(M_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(M_0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le point M_0 est dit régulier, les normales aux courbes intégrales sont sensiblement parallèles les unes aux autres dans un petit voisinage de M_0.

– Cas 2

$$\begin{pmatrix} f_1(M_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le point M_0 est singulier ou point critique : plusieurs comportements sont possibles ; nous les étudierons en T.D. Un tel point donne une solution constante égale à M_0. Pour étudier les solutions voisines, on suppose après translation que $M_0 = (0, ..., 0) = O$. On a alors $f(0, ..., 0) = g(0, ..., 0) = 0$ et le système devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f_1(x_1(t), ..., x_n(t)) = a_{11}x_1 + \cdot + a_{1n}x_n + o(\|(x_1, ..., x_n)\|) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ x_n'(t) & = & f_n(x_1(t), ..., x_n(t)) = a_{n1}x_1 + \cdot + a_{nn}x_n + o(\|(x_1, ..., x_n)\|). \end{array} \right.$$

On introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(O) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(O) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(O) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(O) \end{pmatrix},$$

c'est à dire la matrice jacobienne de f en l'origine.
Le système devient, si on pose $M(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$,

$$M' = AM + G(M)$$

avec

$$G(0, ..., 0) = \frac{\partial G}{\partial x_i}(0, ..., 0) = 0,$$

pour $1 \leq i \leq n$. On a alors
Proposition 4.2.1. *Pour qu'un point singulier $M_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ soit asymptotiquement stable, il suffit que les valeurs propres de la matrice jacobienne*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(M_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(M_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(M_0) \end{pmatrix},$$

ait leur partie réelle strictement négative.
Il suffit d'appliquer le théorème 4.1.4

Remarque 4.2.2. *Contrairement au cas d'un système linéaire, on ne peut pas décider de façon générale quand la partie réelle est nulle.*

Exemples 4.2.3.
$\begin{cases} x'(t) = \alpha x^3 \\ y'(t) = \beta y^3 \end{cases}$, *avec* $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. *Le point* $(0,0)$ *est critique et* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On vérifie facilement que la solution est* $\begin{cases} x(t) = x_0(1 - 2\alpha x_0^2 t)^{-\frac{1}{2}} \\ y(t) = y_0(1 - 2\beta y_0^2 t)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$, *définie pour* $1 - 2\alpha x_0^2 t > 0$ *et* $1 - 2\beta y_0^2 t > 0$. *Ce qui conduit à*

- *si* $\alpha > 0$, $t < \frac{1}{2\alpha x_0^2}$,
- *si* $\alpha < 0$, $t \in \mathbb{R}^+$,
- *si* $\beta > 0$, $t < \frac{1}{2\beta x_0^2}$,
- *si* $\beta < 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Les solutions sont asymptotiquement stables si $\alpha < 0$ *et* $\beta < 0$, *instables si* $\alpha > 0$ *ou* $\beta > 0$.

Définition 4.2.4. *On dira qu'un point singulier M_0 est non dégénéré si*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(M_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(M_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(M_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque 4.2.5. *Dans l'exemple précédent ,* $(0,0)$ *est dégénéré.*

Exemples 4.2.6. *Pour le système*

$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x^2+y \\ y'(t) & = & x+y^2 \end{array} \right.$, $(0,0)$ *est critique non dégénéré.*

4.2.2 Systèmes linéaires en dimension deux

On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & ax+by \\ y' & = & cx+dy \end{array} \right. ,$$

et on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On note λ_1, λ_2 les valeurs propres de A.

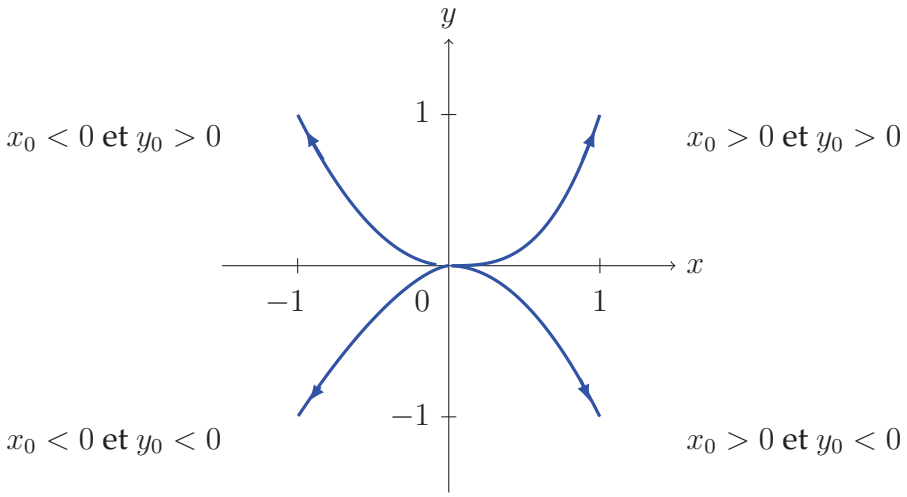
Les valeurs propres de A sont réelles

a) si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la matrice A est diagonalisable, dans la base des vecteurs propres les solutions s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) & = & y_0 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right. ,$$

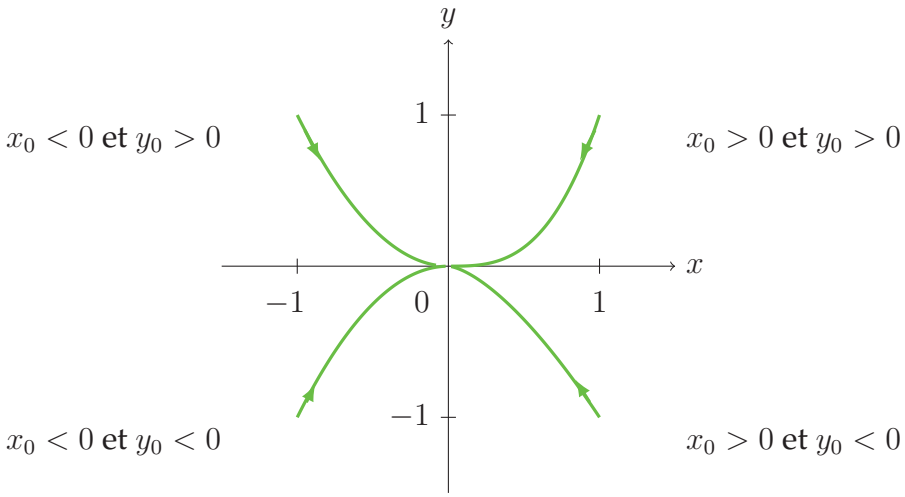
d'où

– pour $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ c'est un noeud impropre instable,



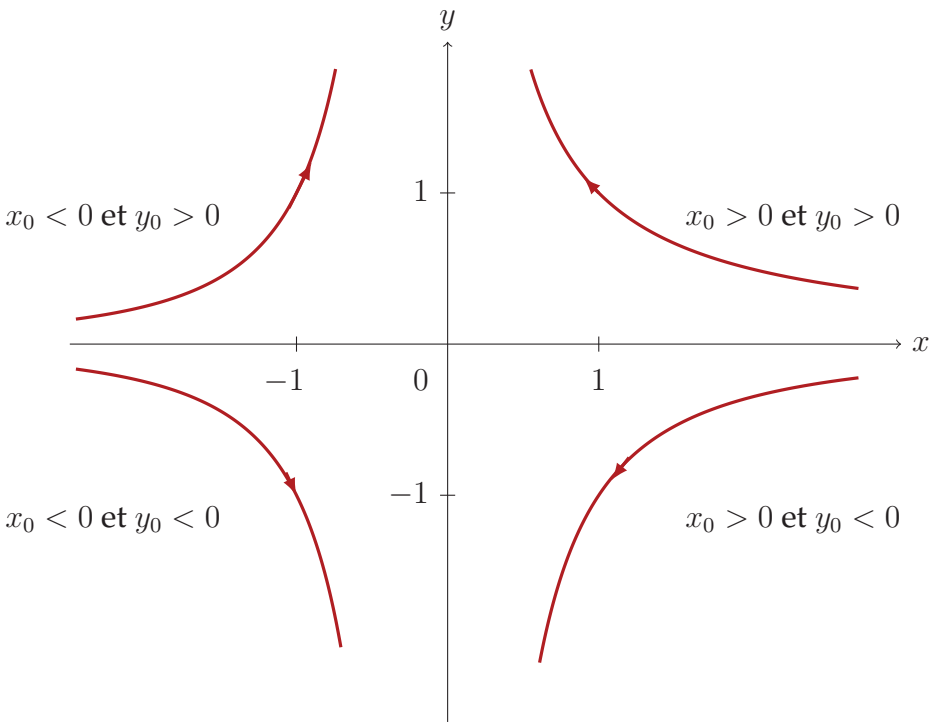
Cas : $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

– pour $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ c'est un noeud impropre asymptotiquement stable,



Cas : $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

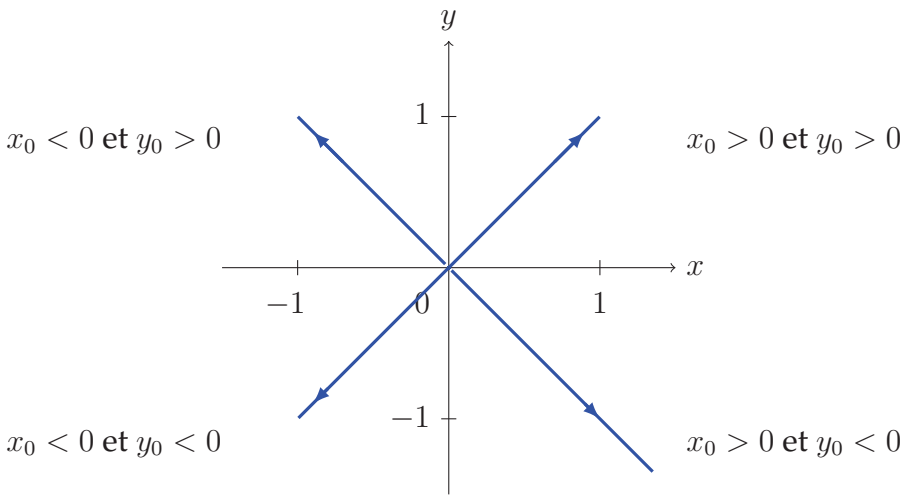
– pour $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ c'est un col, toujours instable.



Cas : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

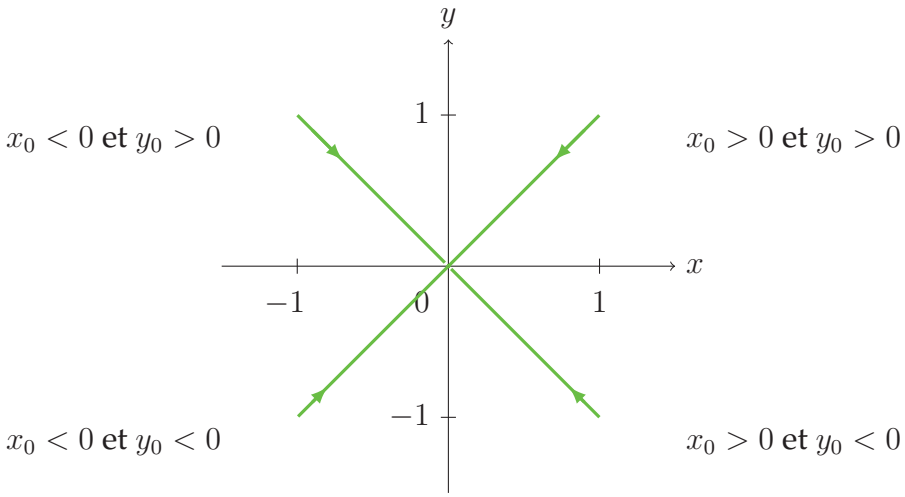
b) si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, et la matrice A est diagonalisable. Dans la base des vecteurs propres les solutions s'écrivent $\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) &= y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$, d'où

– pour $0 < \lambda$ c'est un noeud propre instable,



Cas : $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

– pour $\lambda < 0$ c'est un noeud propre asymptotiquement stable.



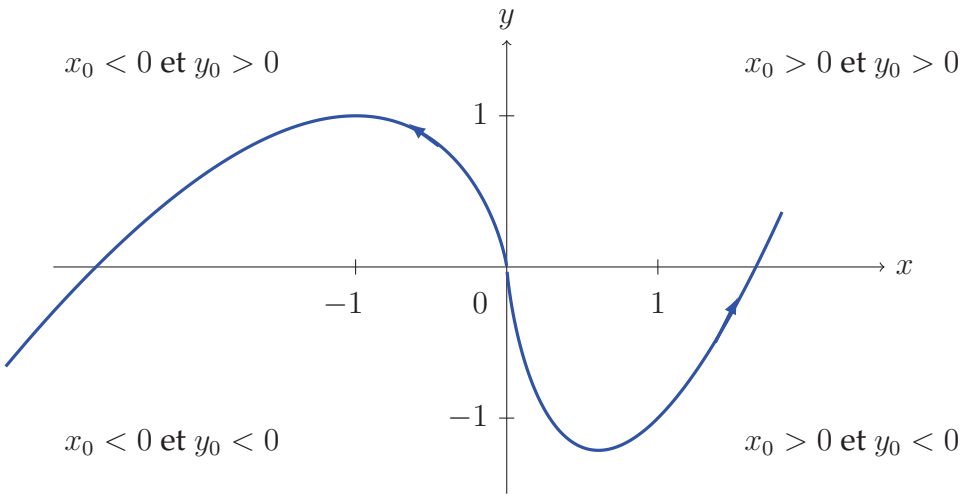
Cas : $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

c) si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, et la matrice A n'est pas diagonalisable. Mais on peut toujours l'écrire sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

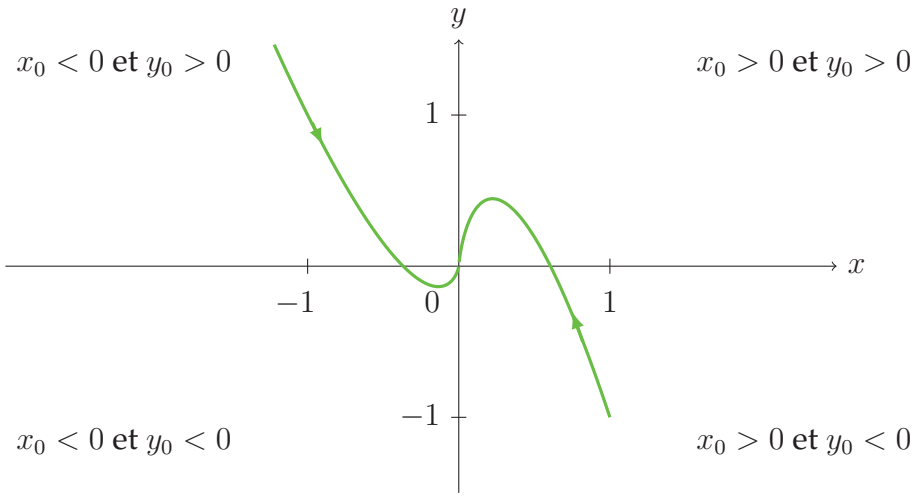
Les solutions s'écrivent $\begin{cases} x(t) &= & x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) &= & (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t} \end{cases}$, d'où

– pour $0 < \lambda$ c'est un noeud exceptionnel instable,



Cas : $0 < \lambda$

– pour $\lambda < 0$ c'est un noeud exceptionnel asymptotiquement stable.



Cas : $\lambda < 0$

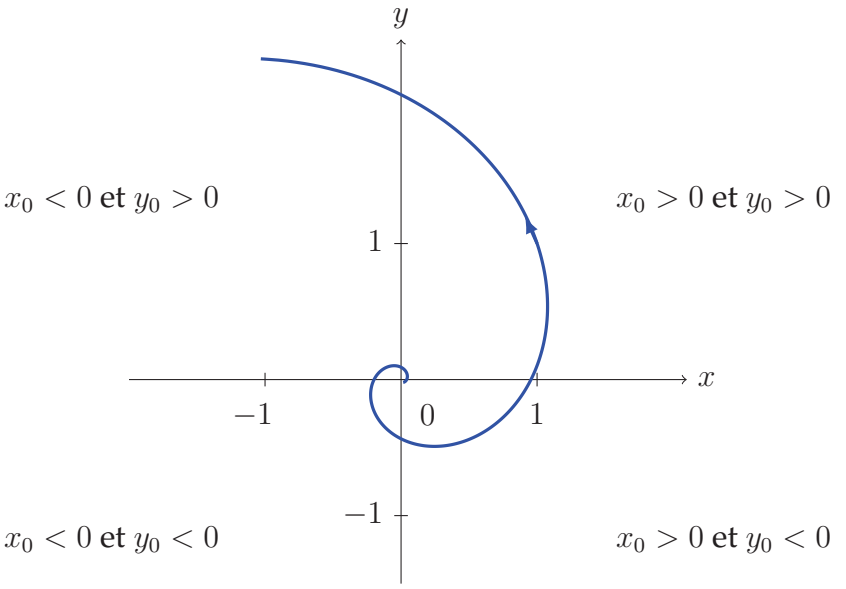
Les valeurs propres de A ne sont pas réelles

On peut écrire $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta > 0$. Dans ce cas il existe une base dans laquelle

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

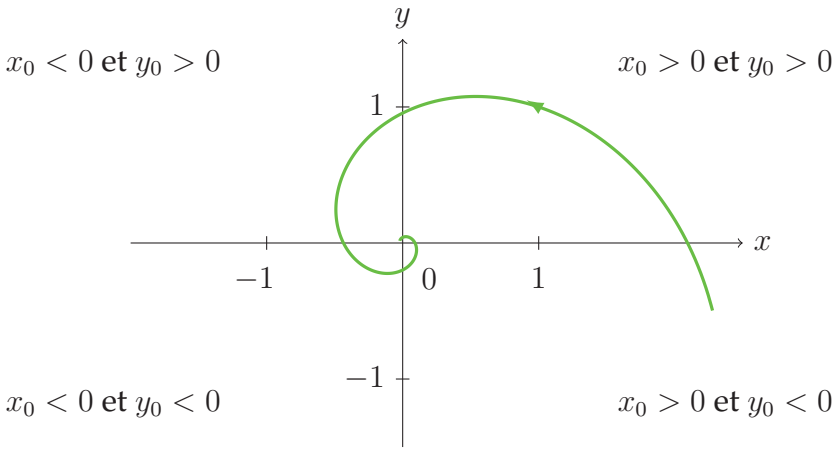
Les solutions s'écrivent $\begin{cases} x(t) &= e^{\alpha t}(x_0 \cos(\beta t) - y_0 \sin(\beta t)) \\ y(t) &= e^{\alpha t}(y_0 \cos(\beta t) + x_0 \sin(\beta t)) \end{cases}$, d'où

– pour $0 < \alpha$ c'est un foyer instable,



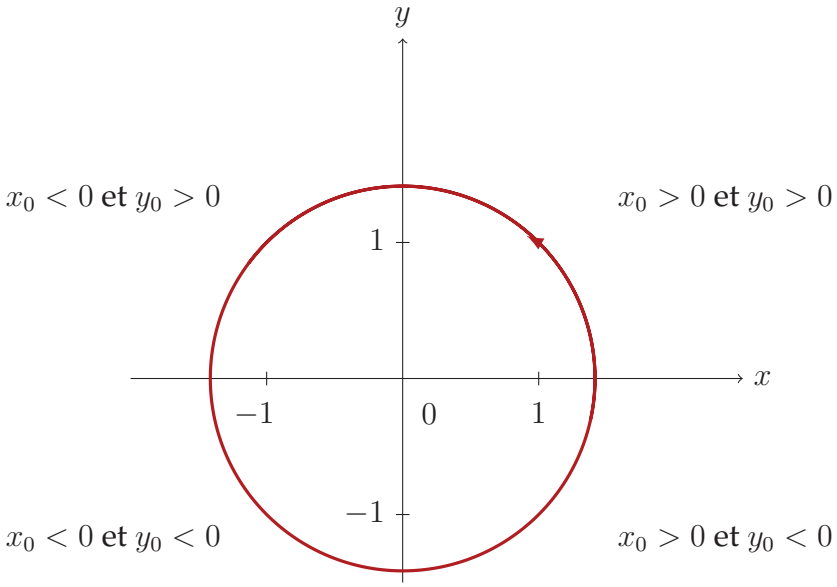
Cas : $0 < \alpha$

– pour $\alpha < 0$ c'est un foyer asymptotiquement stable,



Cas : $\alpha < 0$

– pour $\alpha = 0$ c'est un centre, stable.



Cas : $\alpha = 0$

4.2.3 Systèmes non linéaires

Attention, les courbes intégrales d'un champ de vecteurs quelconque au voisinage d'un point singulier ne ressemblent pas toujours à celles du système linéarisé. En revanche, on a un théorème sur la nature du point singulier. Soit

$$\begin{cases} x_1'(t) &= f_1(x_1(t),...,x_n(t)) = a_{11}x_1 + \cdot + a_{1n}x_n + o(\|(x_1,...,x_n)\|) \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot\cdot \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t),...,x_n(t)) = a_{n1}x_1 + \cdot + a_{nn}x_n + o(\|(x_1,...,x_n)\|) \end{cases}$$

où les fonctions $f_i, 1 \leq i \leq n$ sont de classe C^∞ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, M_0

un point de $\mathbb{R}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(M_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(M_0) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(M_0) \end{pmatrix},$$

Théorème 4.2.7. *Soit M_0 un point critique. Alors*

1. *Si les parties réelles des valeurs propres de A sont strictement négatives, M_0 est asymptotiquement stable.*
2. *Si l'une des parties réelles est strictement positive, M_0 n'est pas stable.*

démonstration 4.2.8. *Pour le point 1), on applique le théorème 4.1.4. Le point 2) découle de la section1.2.*

Exemples 4.2.9.
$\begin{cases} x'(t) &= xy + y \\ y'(t) &= x + xy \end{cases}$ *. Le point $(0,0)$ n'est pas stable, le point $(-1,-1)$ est asymptotiquement stable.*

Que se passe-t-il lorsque les parties réelles sont nulles ?

Définition 4.2.10. *Soit $M_0 \in U$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $L : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $L(M_0) = 0$. On dit que*

i) L est définie positive (respectivement négative) si $L(x_1, ..., x_n) > 0$ (respectivement $L(x_1, ..., x_n) < 0$) pour tout $(x_1, ..., x_n) \in U$ avec $(x_1, ..., x_n) \neq M_0$.

ii) L est semi-définie positive (respectivement négative) si $L(x_1, ..., x_n) \geq 0$ (respectivement $L(x_1, ..., x_n) \leq 0$) pour tout $(x_1, ..., x_n) \in U$.

Exemples 4.2.11.
1) $L(x, y) = x^2y^2$ est semi-définie positive.
2) $L(x, y) = x^2 + y^2$ est définie positive.

On considère le système

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \cdot & \cdot \quad .. \\ \cdot & \cdot \quad .. \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases}$$

où les fonctions $f_i, 1 \leq i \leq n$ sont de classe C^∞ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On définit pour $L : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, la quantité

$$L_{f_i}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) f_i(x_1, ..., x_n) = \frac{dL}{dt}(x_1, ..., x_n)$$

Définition 4.2.12. *On dit que $L : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est de Liapounov pour (f_i) si $L(M_0) = 0$ et*

i) L est définie positive au voisinage de M_0.

ii) L_{f_i} est semi-définie négative au voisinage de M_0.

Théorème 4.2.13. (de stabilité) *Soient $f_i : U \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ de classe C^∞, $M_0 \in U$ avec $f_i(M_0) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et L une fonction de Liapounov pour (f_i). Alors*

1. *M_0 est un point d'équilibre stable de (S).*
2. *Si L_{f_i} est définie négative au voisinage de M_0, M_0 est un point asymptotiquement stable de (S).*

démonstration 4.2.14. *1. Soient $V \subset U$ le voisinage de M_0 sur lequel L est définie, L_{f_i} est semi-définie négative et $\varepsilon > 0$ tel que $B(M_0, \varepsilon) \subset V$. Comme L est continue sur*

$$C_\varepsilon = \{M \in U; \|M - M_0\| = \varepsilon\}$$

qui est fermé et borné, L y atteint ses bornes. Donc il existe $\tilde{M} \in C_\varepsilon$ tel que

$$L(\tilde{M}) = Inf_{M \in C_\varepsilon} L(M) = c > 0. \tag{4.1}$$

Comme $L(M_0) = 0$ et que L est continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|M - M_0\| < \delta \Rightarrow L(M) < c.$$

De plus $\delta < \varepsilon$ d'après ce qui précède. Soit $N_0 \in U$ tel que $\|N_0 - M_0\| < \delta$, alors $L(N_0) < c$. On s'intéresse à la solution de (S) qui au temps t_0 passe par le point N_0. On va montrer que cette solution reste dans la boule ouverte de centre M_0 et de rayon δ. On a

$$\frac{dL}{dt}(M(t)) \leq 0 \Rightarrow L(M(t)) \leq L(M(0)) = L(N_0) < c, \quad \forall t \geq t_0.$$

Supposons qu'il existe un temps $t_1 \geq t_0$ tel que

$$\|M(t_1) - M_0\| \geq \delta,$$

par continuité de la solution et de la norme, il existe alors un temps $t_0 \leq \tilde{t} \leq t_1$ tel que

$$\left\|M(\tilde{t}) - M_0\right\| = \delta.$$

Or, d'après l'équation (4.1),

$$L(M(\tilde{t})) \geq c,$$

ce qui est une contradiction. Nous avons ainsi démontré la stabilité.

2. *Nous reprenons les mêmes notations que pour le 1. Nous allons montrer que* $M(t) \to M_0$ *lorsque* $t \to +\infty$ *c'est à dire :*

$$\forall \delta > 0, \exists T = T(\delta) \text{ tel que } \|M(t) - M_0\| \leq \delta \quad \forall t \geq T.$$

Par les mêmes arguments que précédemment, on sait que pour tout $c > 0$*, on peut choisir* $\delta > 0$ *tel que*

$$L(M) < c \Rightarrow \|M - M_0\| < \delta$$

Il suffit alors de montrer que

$$L(M(t)) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty.$$

Comme $L(M(t))$ *est décroissante et minorée par zéro, il vient que*

$$L(M(t)) \to l \geq 0 \text{ quand } t \to +\infty.$$

Pour montrer que $l = 0$*, on supposera le contraire (*$l > 0$*). Par la continuité de L, il existe* $d > 0$ *tel que*

$$\|M - M_0\| < d \Rightarrow L(M) < l.$$

La limite $L(M(t)) \to l > 0$ *implique que la trajectoire* $M(t)$ *reste à l'extérieur de la boule* $\|M - M_0\| < d$ *pour tout* $t \geq 0$*. Posons*

$$-a = \underset{d \leq \|M - M_0\| \leq \varepsilon}{\text{Max}} \frac{dL}{dt}(M(t)),$$

a existe car $\frac{dL}{dt}$ *est continue sur le fermé, borné* $\{d \leq \|M - M_0\| \leq \varepsilon\}$*. Comme* $\frac{dL}{dt} < 0$*, nous avons* $-a < 0$*. Il vient donc*

$$L(M(t)) = L(M(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{dL}{dt}(M(s))ds \leq L(M(t_0)) - at \to -\infty, \text{ lorsque } t \to +\infty.$$

Cette dernière ingalité contredit l'hypothèse $l > 0$*.*

Théorème 4.2.15. (d'instabilité) *Soient* $f_i : U \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ *de classe* C^∞*,* $M_0 \in U$ *avec* $f_i(M_0) = 0$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *et* L *une fonction de classe* C^1 *avec* $L(M_0) = 0$*. Supposons que*

1. $\forall R > 0, \exists M_R \in U$ *avec* $\|M_R - M_0\| \leq R$ *et* $L(M_R) > 0$*.*
2. *Si* L_{f_i} *est définie positive dans un voisinage de* M_0*.*

Alors M_0 *n'est pas stable.*

démonstration 4.2.16. *Soient $V \subset U$ le voisinage de M_0 sur lequel L est définie, L_{f_i} est définie positive et $R > 0$ tel que $B(M_0, R) \subset V$. Soit un point M_R satisfaisant 1. On considère la solution $M(t)$ qui passe par M_R en $t = t_0$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$M(t) \in \overline{B(M_0, \varepsilon)} \quad \forall t \geq t_0.$$

Alors par continuité de L sur $\overline{B(M_0, \varepsilon)}$ qui est fermé et borné, on a

$$L(M(t)) \leq \operatorname*{Sup}_{y \in \overline{B(M_0, \varepsilon)}} L(y) = K.$$

Comme

$$L(M(t)) = L(M_R) + \int_{t_0}^{t} \frac{dL}{dt}(M(s))ds \leq K, \text{ pour tout } t \geq t_0,$$

et que

$$\frac{dL}{dt}(M(t)) > 0,$$

on en déduit que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{dL}{dt}(M(t)) = 0.$$

Comme $\{M(t), t \geq t_0\}$ est contenu dans $\overline{B(M_0, \varepsilon)}$ qui est fermé et borné, on peut en extraire une sous-suite convergente vers un point $N \in \overline{B(M_0, \varepsilon)}$. Par unicité de la limite, on a alors

$$\frac{dL}{dt}(N) = 0,$$

et comme $\frac{dL}{dt}(M(t)) > 0$ dans $\overline{B(M_0, \varepsilon)}$,

$$L(N) \geq L(M_R) > 0.$$

Donc $N \neq M_0$. Ce qui contredit la proriété 2. Le point M_0 est donc instable.

Exemples 4.2.17.

1) $f(x, y) = -y - x^3$ et $g(x, y) = x - y^3$. On se place en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et on pose $L(x, y) = x^2 + y^2$. Les trois fonctions sont de classe C^∞. Calculons $L_{f,g}(x, y) = -2(x^4 + y^4)$. L est définie positive et $L_{f,g}$ est définie négative. Le point $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

2) $f(x, y) = x^5 + x^3$ et $g(x, y) = -y^5 - y^3$. On se place en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et on pose $L(x, y) = x^2 - y^2$. Les trois fonctions sont de classe C^∞. Calculons $L_{f,g}(x, y) = 2(x^6 + x^4 + y^6 + y^4)$. $L_{f,g}$ est définie positive et $L(R, 0) > 0$ pour tout $R > 0$. Le point $(0, 0)$ n'est pas stable.

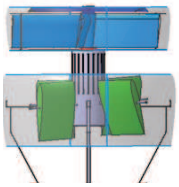
3) $f(x,y) = -y + x^3$ *et* $g(x,y) = x + y^3$*. On se place en* $(x_0, y_0) = (0,0)$ *et on pose* $L(x,y) = x^2 + y^2$*. Les trois fonctions sont de classe* C^∞*. Calculons* $L_{f,g}(x,y) = 2(x^4 + y^4)$*. L est définie positive et* $L_{f,g}$ *est définie positive. Le point* $(0,0)$ *n'est pas stable.*

4)

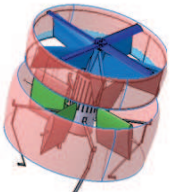
Stabilisation d'un drone en mode hélicoptère

Ce drone peut présenter 3 modes de fonctionnement différents :

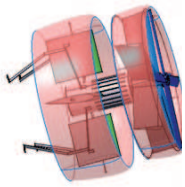
- *Mode hélicoptère : orientation verticale de l'axe longitudinal de l'appareil et déplacements en translation selon l'axe vertical.*
- *Mode avion*
- *Phases de basculement entre le mode avion et le mode hélicoptère*



Mode hélicoptère



Phase de basculement



Mode avion

Ce drone est équipé d'un moteur brushless actionnant une hélice. Le signal de commande est le courant d'entrée du moteur, $I(t)$*. On note* $Z(t)$ *l'altitude du drone par rapport au sol,* $Z(t)$*. Le drone est muni d'un télémètre à ultrasons permettant de mesurer son altitude par rapport au sol,* $Z(t)$*. Lorsque le drone est posé sur le sol, on a* $Z = 0$*. On note* $V_z(t) = \dot{Z}(t)$ *la vitesse du drone selon l'axe vertical. La vitesse de rotation de l'hélice est notée* $R(t)$*. Le vecteur d'état considéré est :*

$$X(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ V_z(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$

Le comportement du drone en mode hélicoptère peut tre modélisé par l'équation d'état non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = V_z(t) \\ \dot{V}_z(t) = \dfrac{k_h\, I(t)\, (R(t))^2}{M\, K_c} - g \\ \dot{R}(t) = \dfrac{I(t)}{I_h\, K_c} - \dfrac{k_1\, (R(t))^2\, (1 + k_2\, (I(t))^2)}{I_h} \end{cases} \tag{4.2}$$

où

- M *est la masse du drone,*
- g *représente la gravité,*
- K_c *est la constante de couple du moteur,*
- I_h *est le moment d'inertie de l'hélice,*
- k_h*,* k_1 *et* k_2 *sont des coefficients aérodynamiques que l'on supposera constants.*

Les points d'équilibre de l'équation d'état (4.2) *n'existe que si le courant d'entrée du moteur vérifie la relation*

$$I_e = \sqrt{\frac{k_1\, M\, g\, K_c^2}{k_h - k_1\, k_2\, M\, g\, K_c^2}}.$$

Dans ce cas, les points d'équilibre sont de la forme X_e *:*

$$X_e = \begin{pmatrix} Z_e \\ V_{ze} \\ R_e \end{pmatrix}$$

$$Z_e \text{ est quelconque}, \quad V_{ze} = 0 \quad \text{et} \quad R_e = \sqrt{\frac{M\, g\, K_c}{k_h\, I_e}}$$

On choisit $Z_e = 0$*. Ce point d'équilibre est-il stable ?*
La matrice jacobienne en ce point est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2k_h I_e R_e}{M K_c} \\ 0 & 0 & \dfrac{-2R_e k_1\,(1 + k_2 I_e^2)}{I_h} \end{pmatrix},$$

qui admet deux valeurs propres nulles et une strictement négative. On ne peut pas conclure sur la stabilité. On pose

$$L(V, Z, R) = \frac{I_e R}{I_h\, K_c} - \frac{k_1\, R^3\, (1 + k_2\, I_e^2)}{3 I_h}$$

Alors

$$L_{V,Z,R} = \Big(\frac{I_e}{I_h\, K_c} - \frac{k_1\, R^2\,(1 + k_2\, I_e^2)}{I_h}\Big)\dot{R} = \Big(\frac{I_e}{I_h\, K_c} - \frac{k_1\, R^2\,(1 + k_2\, I_e^2)}{I_h}\Big)^2$$

est définie positive et si on pose $V = \delta$, $Z = \gamma$ *et* $R = R_e + \varepsilon$, *on a*

$$L_{V,Z,R} = R\Big(\frac{I_e}{I_h\, K_c} - \frac{k_1\,(R_e + \varepsilon)^2\,(1 + k_2\, I_e^2)}{3I_h}\Big) = R\frac{k_1}{I_h}(1 + k_2\, I_e^2)\Big(R_e^2 - \frac{(R_e + \varepsilon)^2}{3}\Big).$$

On peut donc choisir ε *aussi petit que l'on veut pour que cette quantité soit positive.*

On peut alors appliquer le théorème d'instabilité : le point $(0, 0, R_e)$ *est instable.*