Robotique
Manipulation et commande

Université de Strasbourg

Telecom Physique Strasbourg, option ISAV

Master IRIV, parcours AR

Chapitre 2 – Modélisation géométrique

Plan du chapitre

- 1. Introduction
- 2 Convention de Denavit-Hartenberg
  - 2.1. Introduction
  - 2.2. Les paramètres de DH
  - 2.3. Matrice homogène de DH
  - 2.4. Modélisation géométrique d'un robot
  - 2.5 Exemples
- 3. Modèle géométrique inverse
  - 3.1. Définition
  - 3.2. Exemple 1
  - 3.3. Exemple 2

1. Introduction

1.1. Définitions

- **Modèle géométrique direct**
  - Donne l'attitude de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires (longueur pour une articulation prismatique ou angle pour une rotoïde).
- **Modèle géométrique inverse**
  - Donne, si elles existent, le ou les ensembles de positions articulaires en fonction de l'attitude de l'organe terminal.

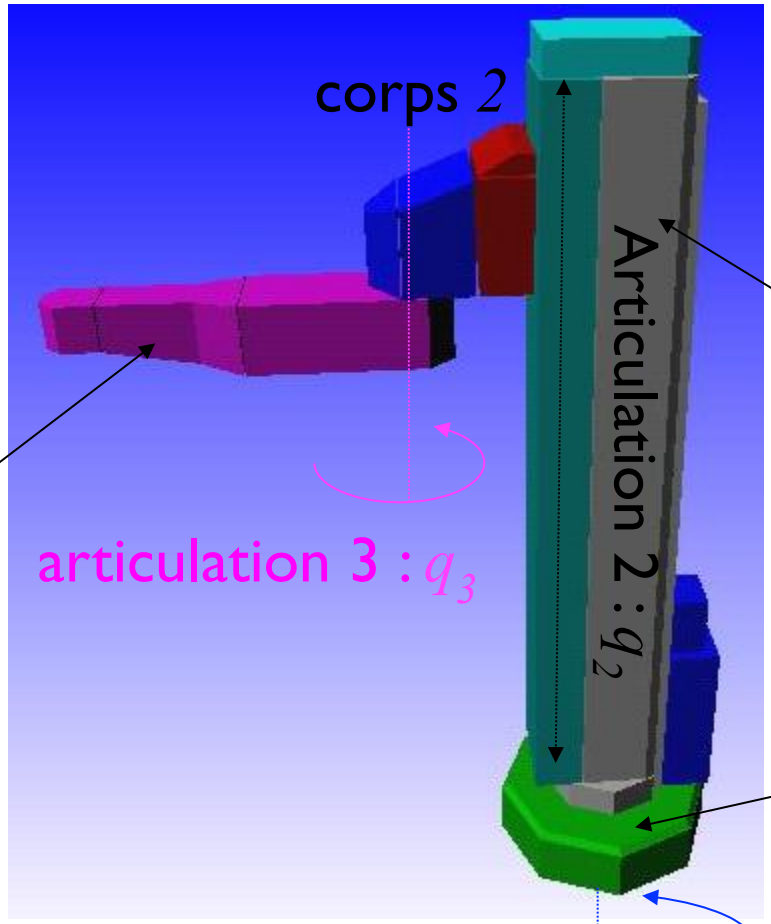
1. Introduction

1.2. Principe : idée générale

- **Principe**
  - Fixer un repère à chaque corps du robot.
  - Calculer la matrice homogène entre chaque repère.
  - En déduire la matrice homogène entre la base et l'organe terminal.
- **Hypothèses**
  - Le robot est un chaînage de $n+1$ corps liés entre eux par n articulations.
  - A chaque corps on associe un repère R_i . Les repères sont numérotés de 0 à n.
  - La $i^{ème}$ articulation dont la position est notée q_i relie les corps $i-1$ et i.

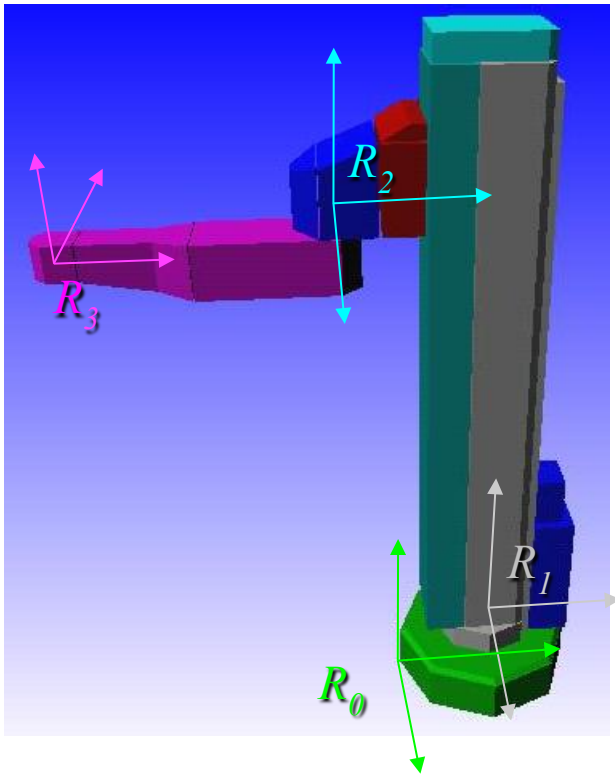
1. Introduction

1.2. Principe : exemple

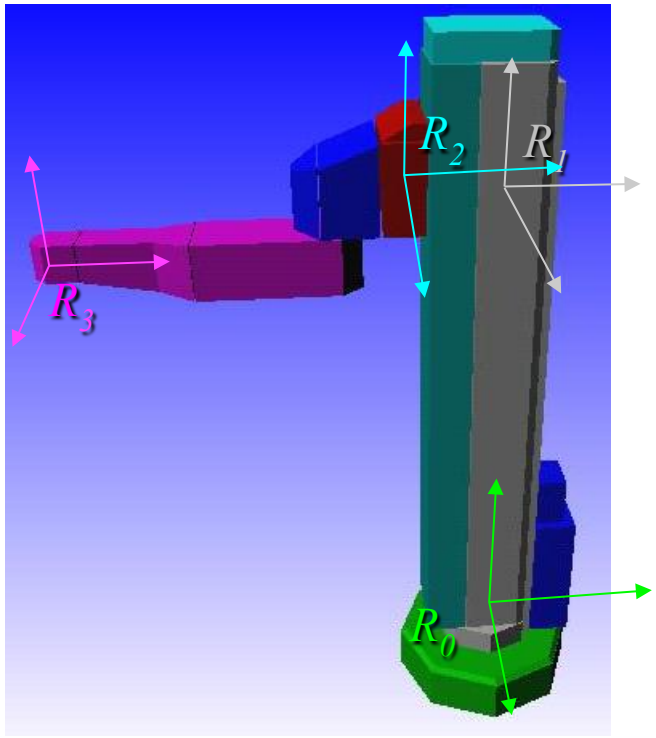


1. Introduction

1.2. Principe : exemple



ou bien



On a : $M_{03}(\boldsymbol{q}) = M_{01}(q_1)M_{12}(q_2)M_{23}(q_3)$ avec $\boldsymbol{q} = [q_1\, q_2\, q_3]^T$

2. Convention de DH

2.1. Introduction

- **Convention de Denavit-Hartenberg**
  - Permet de normaliser, simplifier et rationaliser la modélisation géométrique d'un robot.
- **Hypothèses**
  - L'attitude d'un repère R_i par rapport au repère R_{i-1} est exprimée au moyen de 4 paramètres uniques : les paramètres de DH.
  - Deux contraintes limitent les degrés de liberté du repère R_i par rapport au repère R_{i-1} :
    - L'axe x_i de R_i est perpendiculaire à l'axe z_{i-1} de R_{i-1}
    - L'axe x_i coupe l'axe z_{i-1}

2. Convention de DH

2.2. Les paramètres de DH

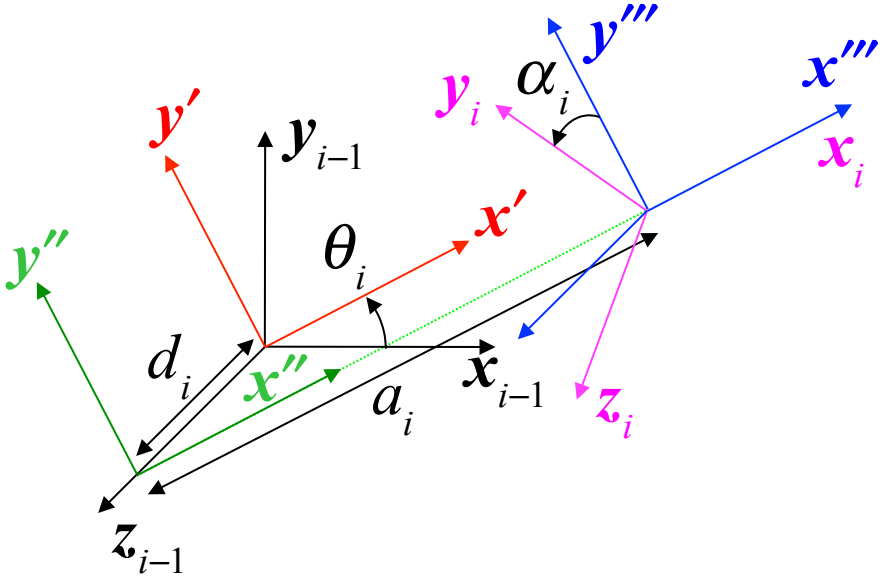
- Décomposition de $M_{i-1\ i}$ en 4 transformations élémentaires :
  1. Rotation autour de z d'un angle θ_i
  2. Translation autour de z d'une longueur d_i
  3. Translation autour de x d'une longueur a_i
  4. Rotation autour de x d'un angle α_i
- Ces transformations se font par rapport au repère courant. D'où :

$$M_{i-1\,i} = R_{(z_{i-1},\theta_i)} T_{(z_{i-1},d_i)} T_{(x_i,a_i)} R_{(x_i,\alpha_i)}$$

2. Convention de DH
2.2. Les paramètres de DH

- On vérifie que les 2 conditions de DH sont remplies :

θ_i d_i a_i et α_i sont les paramètres de Denavit-Hartenberg



- Unicité :
  - Soit $M_{i\text{-}1\ i}$ vérifiant les 2 conditions de DH
  - Dans ce cas, on démontre [SPONG] que les paramètres de DH θ_i d_i a_i et α_i sont uniques.

2. Convention de DH

2.3. Matrice homogène de DH

- On a : $M_{i-1\,i} = R_{(z_{i-1},\theta_i)} T_{(z_{i-1},d_i)} T_{(x_i,a_i)} R_{(x_i,\alpha_i)}$
- D'où :

$$M_{i-1\,i} =$$

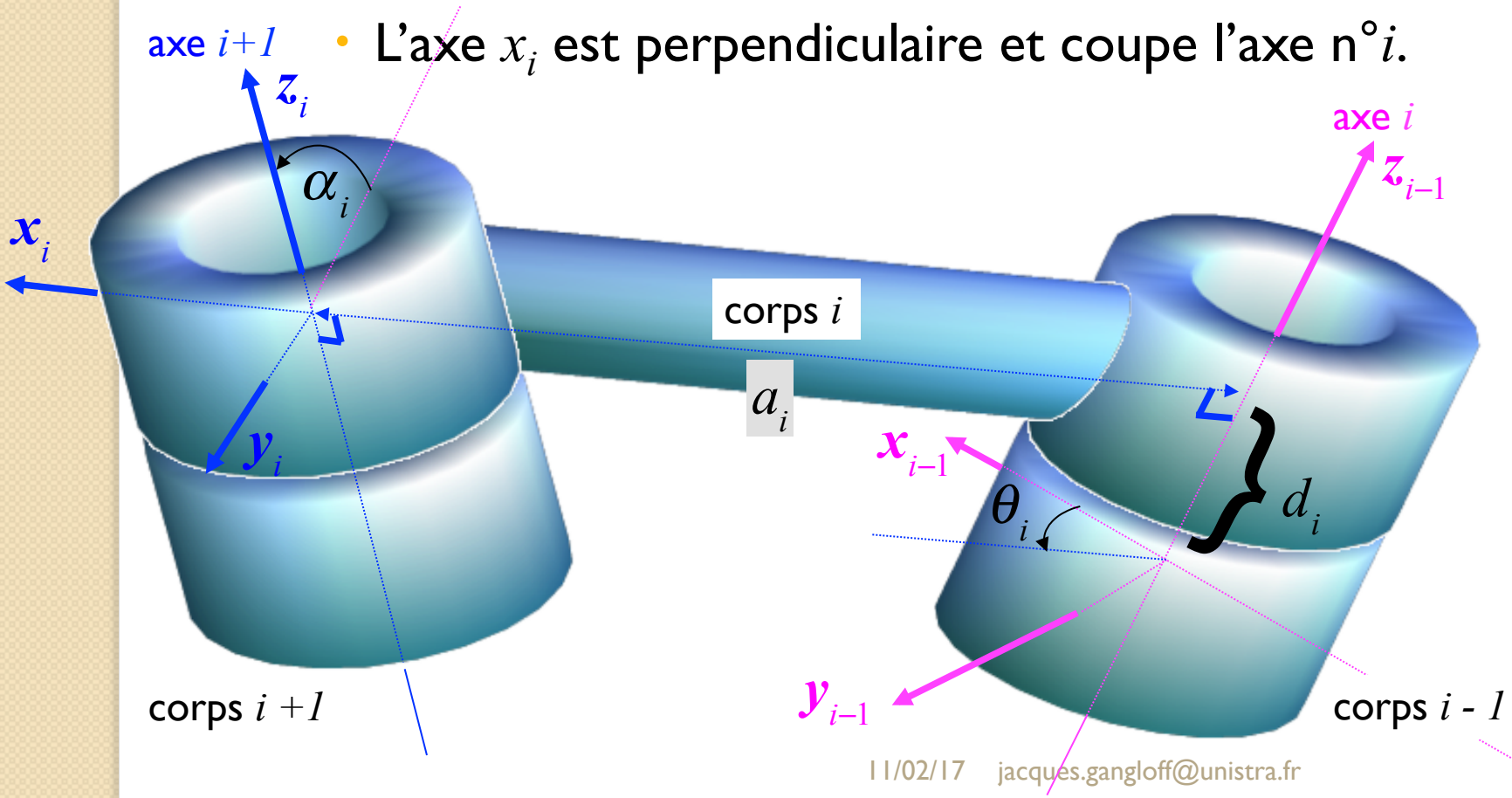
$$\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Convention de DH

2.4. Application à un robot série : cas général

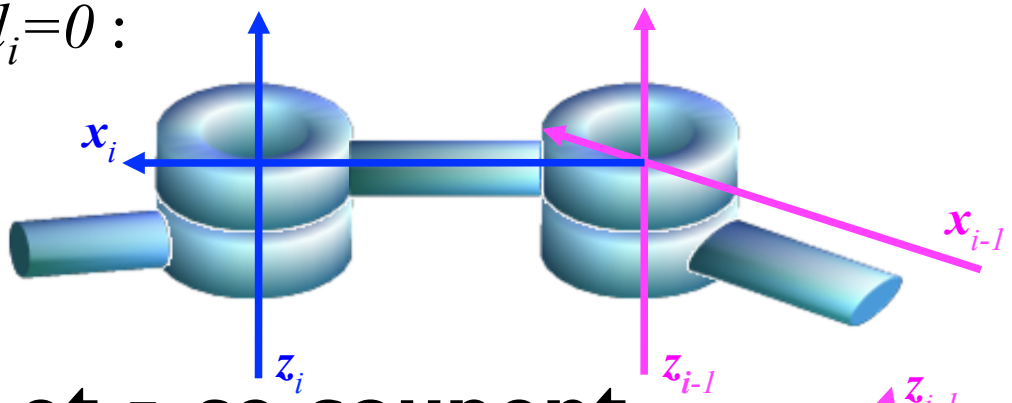
- Règle de positionnement du repère R_i :
  - L'axe z_i est confondu avec l'axe n°$i+1$ du robot.
  - L'axe x_i est perpendiculaire et coupe l'axe n°i.



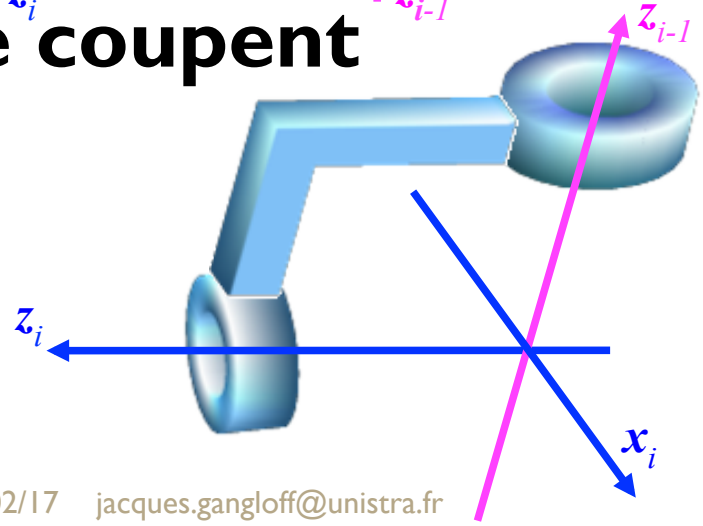
2. Convention de DH

2.4. Application à un robot série : cas particuliers

- **Les axes z_{i-1} et z_i sont parallèles**
  - Il y a une infinité de normales communes entre z_i et z_{i-1} . On fixe $d_i=0$:



- **Les axes z_{i-1} et z_i se coupent**
  - Dans ce cas : $a_i=0$:



2. Convention de DH

2.4. Application à un robot série : cas particuliers

- **Choix du repère R_0**
  - L'origine du repère R_0 peut être choisie n'importe où le long de l'axe 1.
  - L'axe x_0 peut être choisi de manière quelconque.
- **Choix du repère R_n**
  - L'origine est en général placée au centre de l'outil (TCP).
  - Parfois on impose y dans le sens de la fermeture de la pince.

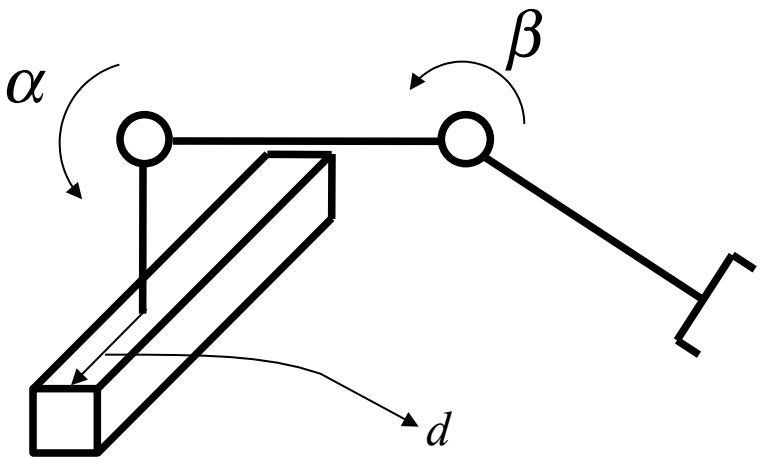
2. Convention de DH

2.4. Application à un robot série : remarques

- **Remarques**
  - Lorsqu'on a le choix et en l'absence de contrainte particulière, on privilégiera toujours la solution la plus simple (*i.e.* celle qui donne le plus de 0 dans le tableau de DH).
  - Le sens des axes z respecte le sens positif d'évolution des coordonnées articulaires.
  - Le choix des repères impose une configuration nulle du manipulateur (celle pour laquelle les coordonnées articulaires sont nulles). On peut en changer en imposant des offsets à θ ou d dans le tableau de DH.

2. Convention de DH

2.5. Exemple 1 : manipulateur plan



a_1 : longueur du corps 1
a_2 : longueur du corps 2
a_3 : longueur du corps 3
$d=\alpha=\beta=0$: bras vertical

Corps	a_i	α_i	d_i	θ_i
1				
2				
3				

* Paramètres variables

2. Convention de DH

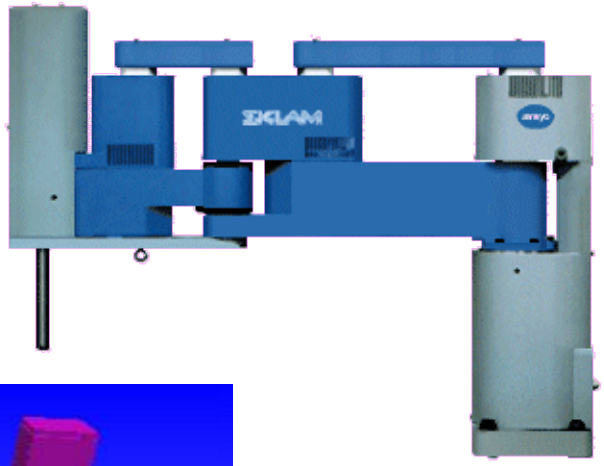
2.5. Exemple 1 : manipulateur plan

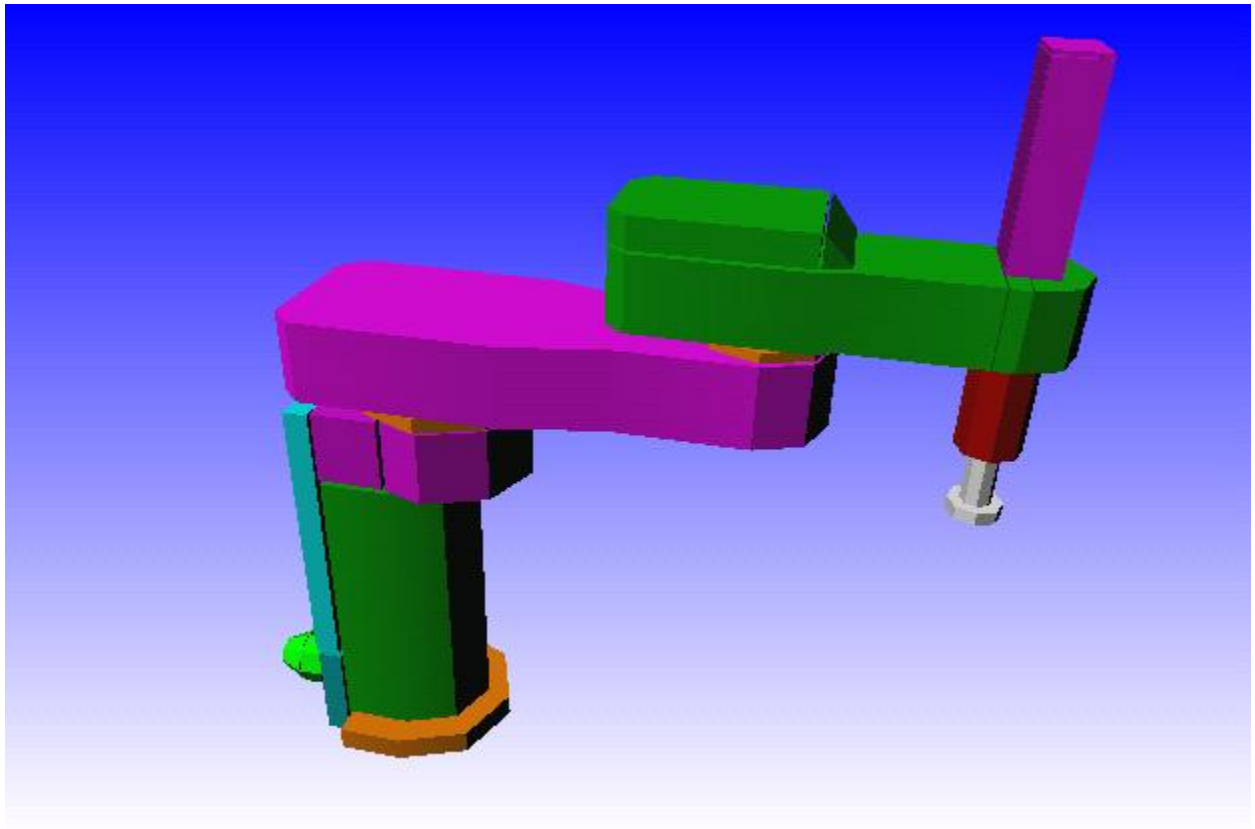
- On a :

$$M_{i-1\,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Convention de DH

2.5. Exemple 2 : robot SCARA





2. Convention de DH

2.5. Exemple 2 : robot SCARA

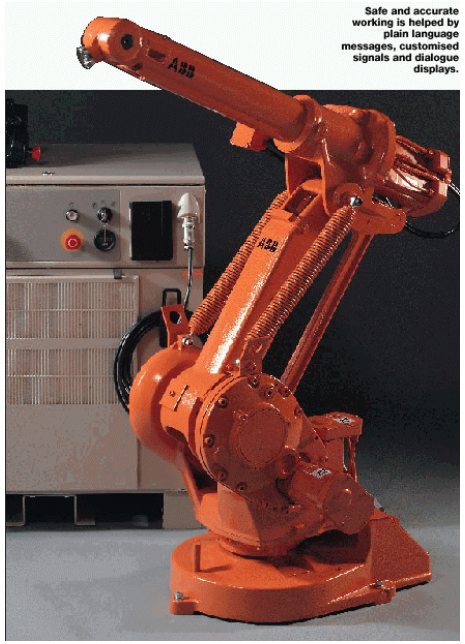
Corps	a_i	α_i	d_i	θ_i
1				
2				
3				

$$M_{i-1\,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

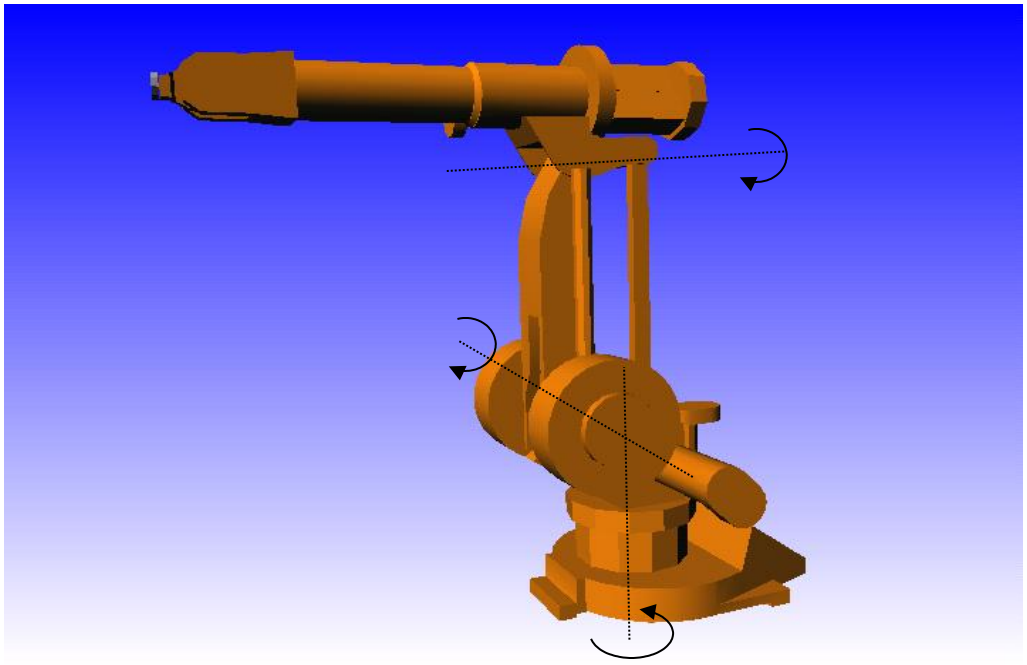
2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

- Décomposition en 2 parties :
  1. Les 3 premiers axes
  2. Les 3 derniers axes = poignet



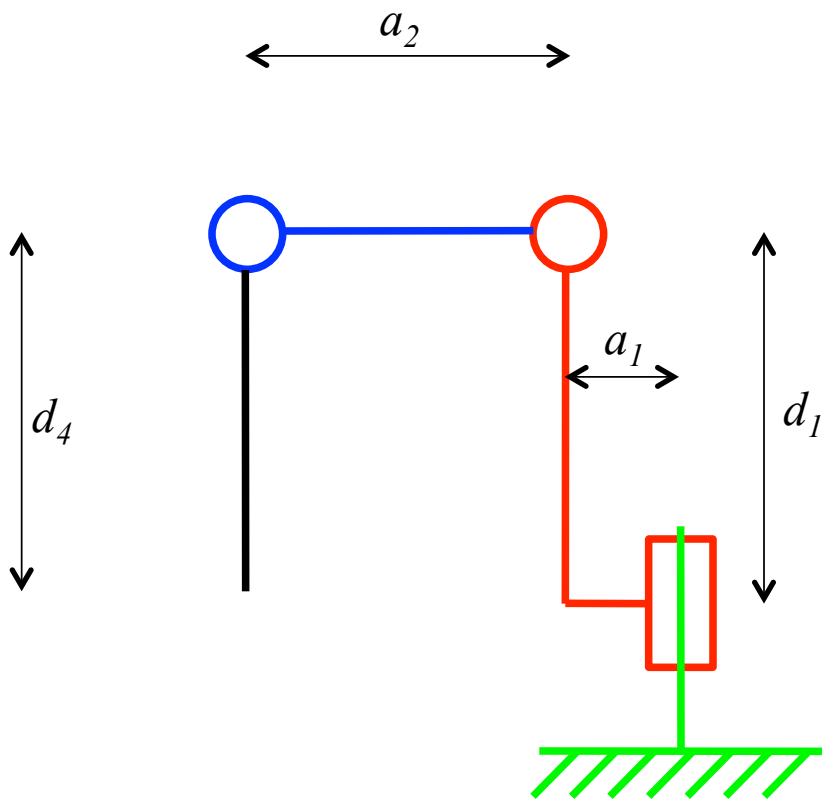
IRB 1400, ABB™



Les 3 premiers axes d'un 6R

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe



Corps	a_i	α_i	d_i	θ_i
1				
2				
3				

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

Corps	a_i	α_i	d_i	θ_i
1				
2				
3				

$$M_{i-1\,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

$$\text{Soit : } M_{03} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} T_x = \frac{1}{2} a_2 \left(c(\theta_1 - \theta_2) + c(\theta_1 + \theta_2) \right) + a_1 c_1 \\ T_y = \frac{1}{2} a_2 \left(s(\theta_1 + \theta_2) + s(\theta_1 - \theta_2) \right) + a_1 s_1 \\ T_z = a_2 s_2 + d_1 \end{cases}$$

$$\text{Et } \begin{cases} r_{11} = \frac{1}{2} \left(c(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) + c(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) \right) \\ r_{12} = s_1 \\ r_{13} = -\frac{1}{2} \left(s(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) + s(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) \right) \\ r_{21} = \frac{1}{2} \left(s(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) + s(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) \right) \\ r_{22} = -c_1 \\ r_{23} = -\frac{1}{2} \left(c(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) - c(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) \right) \end{cases} \quad \begin{cases} r_{31} = s_{23} \\ r_{32} = 0 \\ r_{33} = -c_{23} \end{cases}$$

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

- **Remarques**
  - Il peut être utile d'avoir recours à un logiciel de calcul symbolique pour le modèle géométrique.
  - Sous Matlab avec la boite à outils « Maple », le calcul de M_{03} s'effectue de la manière suivante :

```
>> syms t1 t2 t3 a1 a2 a3 d1
>> M01=[cos(t1) 0 sin(t1) a1*cos(t1); sin(t1) 0 -cos(t1) a1*sin(t1);0 1 0 d1; 0 0 0 1]
>> M12=[cos(t2) -sin(t2) 0 a2*cos(t2); sin(t2) cos(t2) 0 a2*sin(t2); 0 0 1 0; 0 0 0 1]
>> M23=[cos(t3) 0 sin(t3) 0; sin(t3) 0 -cos(t3) 0; 0 1 0 0; 0 0 0 1]
>> M03=simple(M01*M12*M23)

M03 = [1/2*cos(-t3+t1-t2)+1/2*cos(t3+t1+t2),sin(t1),-1/2*sin(-t3+t1-t2)+1/2*sin(t3+t1+t2),
1/2*a2*cos(t1-t2)+1/2*a2*cos(t1+t2)+a1*cos(t1)]
[1/2*sin(t3+t1+t2)+1/2*sin(-t3+t1-t2),-cos(t1),-1/2*cos(t3+t1+t2)+1/2*cos(-t3+t1-t2),
1/2*a2*sin(t1+t2)+1/2*a2*sin(t1-t2)+a1*sin(t1)]
[sin(t2+t3),0,-cos(t2+t3),a2*sin(t2)+d1]
[0,0,0,1]
```

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

- Vérifications :
  - Pour $\theta_{1,2} = 0$ et $\theta_3 = \pi/2$:

$$M_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Configuration bras horizontal

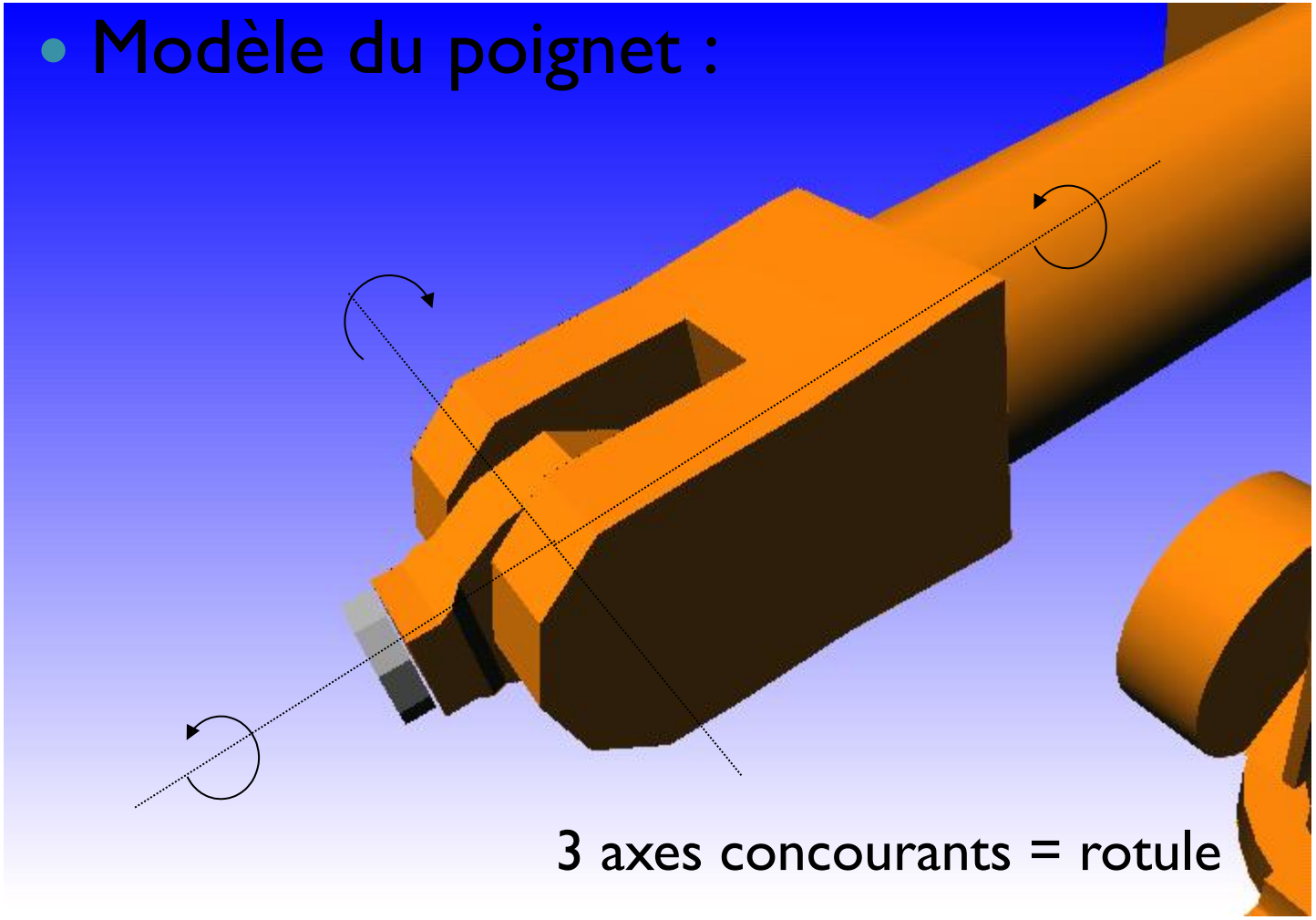
  - Pour $\theta_{2,3} = \pi/2$ et $\theta_1 = 0$:

$$M_{03} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Configuration bras vertical

2. Convention de DH

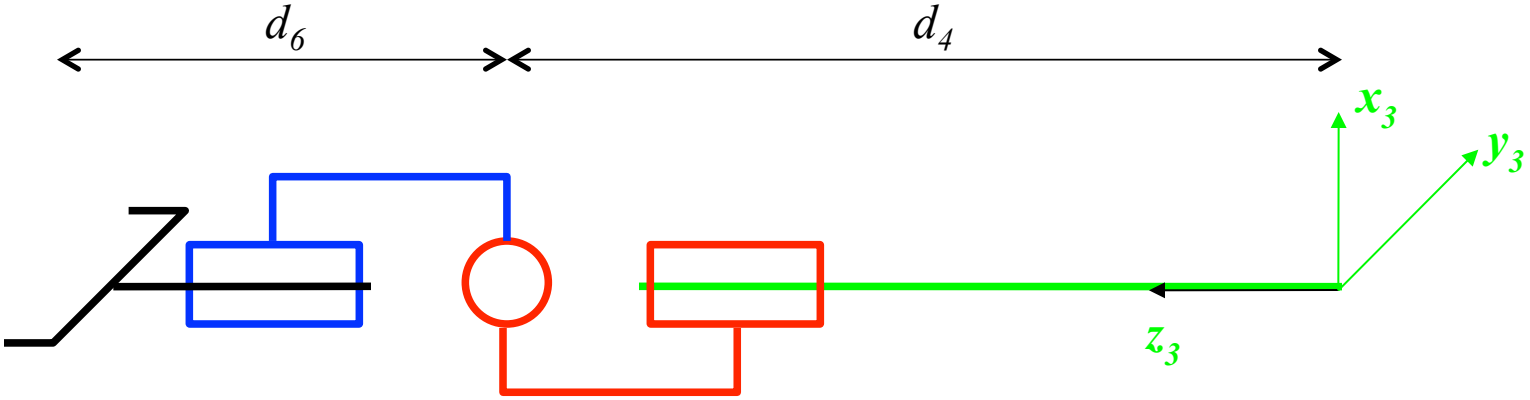
2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

- Modèle du poignet :



2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe



Corps	a_i	α_i	d_i	θ_i
1				
2				
3				

2. Convention de DH
2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

- D'où :

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

- On en déduit : $M_{06} = M_{03} M_{36}$

```
>> ccode(M06)

ans =

M06[0][0] = cos(q1) * cos(q2) * cos(q3) * cos(q4) * cos(q5) * cos(q6) - cos(q1) * cos(q2) *
cos(q3) * sin(q4) * sin(q6) - cos(q1) * sin(q2) * sin(q3) * cos(q4) * cos(q5) * cos(q6) +
cos(q1) * sin(q2) * sin(q3) * sin(q4) * sin(q6) + sin(q1) * sin(q4) * cos(q5) * cos(q6) +
sin(q1) * cos(q4) * sin(q6) - sin(q5) * cos(q6) * cos(q1) * cos(q2) * sin(q3) - sin(q5) *
cos(q6) * cos(q1) * sin(q2) * cos(q3);
M06[0][1] = -cos(q1) * cos(q2) * cos(q3) * cos(q4) * cos(q5) * sin(q6) - cos(q1) * cos(q2) *
cos(q3) * sin(q4) * cos(q6) + cos(q1) * sin(q2) * sin(q3) * cos(q4) * cos(q5) * sin(q6) +
cos(q1) * sin(q2) * sin(q3) * sin(q4) * cos(q6) - sin(q1) * sin(q4) * cos(q5) * sin(q6) +
sin(q1) * cos(q4) * cos(q6) + sin(q5) * sin(q6) * cos(q1) * cos(q2) * sin(q3) + sin(q5) *
sin(q6) * cos(q1) * sin(q2) * cos(q3);
M06[0][2] = cos(q4) * sin(q5) * cos(q1) * cos(q2) * cos(q3) - cos(q4) * sin(q5) * cos(q1) *
sin(q2) * sin(q3) + sin(q1) * sin(q4) * sin(q5) + cos(q1) * cos(q2) * sin(q3) * cos(q5) +
cos(q1) * sin(q2) * cos(q3) * cos(q5);
M06[0][3] = cos(q4) * sin(q5) * d6 * cos(q1) * cos(q2) * cos(q3) - cos(q4) * sin(q5) * d6 *
cos(q1) * sin(q2) * sin(q3) + sin(q1) * sin(q4) * sin(q5) * d6 + cos(q1) * cos(q2) * sin(q3) *
cos(q5) * d6 + cos(q1) * cos(q2) * sin(q3) * d4 + cos(q1) * sin(q2) * cos(q3) * cos(q5) * d6 +
cos(q1) * sin(q2) * cos(q3) * d4 + cos(q1) * cos(q2) * a2 + cos(q1) * a1;
```

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

```
M06[1][0] = sin(q1) * cos(q2) * cos(q3) * cos(q4) * cos(q5) * cos(q6) - sin(q1) * cos(q2) *
cos(q3) * sin(q4) * sin(q6) - sin(q1) * sin(q2) * sin(q3) * cos(q4) * cos(q5) * cos(q6) +
sin(q1) * sin(q2) * sin(q3) * sin(q4) * sin(q6) - cos(q1) * sin(q4) * cos(q5) * cos(q6) -
cos(q1) * cos(q4) * sin(q6) - sin(q5) * cos(q6) * sin(q1) * cos(q2) * sin(q3) - sin(q5) *
cos(q6) * sin(q1) * sin(q2) * cos(q3);
M06[1][1] = -sin(q1) * cos(q2) * cos(q3) * cos(q4) * cos(q5) * sin(q6) - sin(q1) * cos(q2) *
cos(q3) * sin(q4) * cos(q6) + sin(q1) * sin(q2) * sin(q3) * cos(q4) * cos(q5) * sin(q6) +
sin(q1) * sin(q2) * sin(q3) * sin(q4) * cos(q6) + cos(q1) * sin(q4) * cos(q5) * sin(q6) -
cos(q1) * cos(q4) * cos(q6) + sin(q5) * sin(q6) * sin(q1) * cos(q2) * sin(q3) + sin(q5) *
sin(q6) * sin(q1) * sin(q2) * cos(q3);
M06[1][2] = cos(q4) * sin(q5) * sin(q1) * cos(q2) * cos(q3) - cos(q4) * sin(q5) * sin(q1) *
sin(q2) * sin(q3) - cos(q1) * sin(q4) * sin(q5) + sin(q1) * cos(q2) * sin(q3) * cos(q5) +
sin(q1) * sin(q2) * cos(q3) * cos(q5);
M06[1][3] = cos(q4) * sin(q5) * d6 * sin(q1) * cos(q2) * cos(q3) - cos(q4) * sin(q5) * d6 *
sin(q1) * sin(q2) * sin(q3) - cos(q1) * sin(q4) * sin(q5) * d6 + sin(q1) * cos(q2) * sin(q3) *
cos(q5) * d6 + sin(q1) * cos(q2) * sin(q3) * d4 + sin(q1) * sin(q2) * cos(q3) * cos(q5) * d6 +
sin(q1) * sin(q2) * cos(q3) * d4 + sin(q1) * cos(q2) * a2 + sin(q1) * a1;
M06[2][0] = sin(q2) * cos(q3) * cos(q4) * cos(q5) * cos(q6) - sin(q2) * cos(q3) * sin(q4) *
sin(q6) + cos(q2) * sin(q3) * cos(q4) * cos(q5) * cos(q6) - cos(q2) * sin(q3) * sin(q4) *
sin(q6) - sin(q5) * cos(q6) * sin(q2) * sin(q3) + sin(q5) * cos(q6) * cos(q2) * cos(q3);
M06[2][1] = -sin(q2) * cos(q3) * cos(q4) * cos(q5) * sin(q6) - sin(q2) * cos(q3) * sin(q4) *
cos(q6) - cos(q2) * sin(q3) * cos(q4) * cos(q5) * sin(q6) - cos(q2) * sin(q3) * sin(q4) *
cos(q6) + sin(q5) * sin(q6) * sin(q2) * sin(q3) - sin(q5) * sin(q6) * cos(q2) * cos(q3);
M06[2][2] = cos(q4) * sin(q5) * sin(q2) * cos(q3) + cos(q4) * sin(q5) * cos(q2) * sin(q3) +
sin(q2) * sin(q3) * cos(q5) - cos(q2) * cos(q3) * cos(q5);
M06[2][3] = cos(q4) * sin(q5) * d6 * sin(q2) * cos(q3) + cos(q4) * sin(q5) * d6 * cos(q2) *
sin(q3) + sin(q2) * sin(q3) * cos(q5) * d6 + sin(q2) * sin(q3) * d4 - cos(q2) * cos(q3) *
cos(q5) * d6 - cos(q2) * cos(q3) * d4 + sin(q2) * a2 + d1;
```

2. Convention de DH

2.5. Exemple 3 : 6 axes anthropomorphe

- **Vérifications**
  - Bras replié ($\theta_{1\ldots6} = 0$) :

$$M_{06} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 + a_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 - d_4 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Bras vertical ($\theta_{1,4,5,6} = 0$ et $\theta_{2,3} = \pi/2$) :

$$M_{06} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 + d_4 + a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Modèle géométrique inverse
3.1. Définitions

- **Modèle géométrique direct (MGD)**
  - Le modèle géométrique direct est donc une fonction qui permet d'exprimer l'attitude de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires.
  - Par exemple, lorsque l'attitude est exprimées à l'aide de 6 coordonnées :

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} T_x(\boldsymbol{q}) \\ T_y(\boldsymbol{q}) \\ T_z(\boldsymbol{q}) \\ \theta_r(\boldsymbol{q}) \\ \theta_t(\boldsymbol{q}) \\ \theta_l(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = G_d(\boldsymbol{q})$$

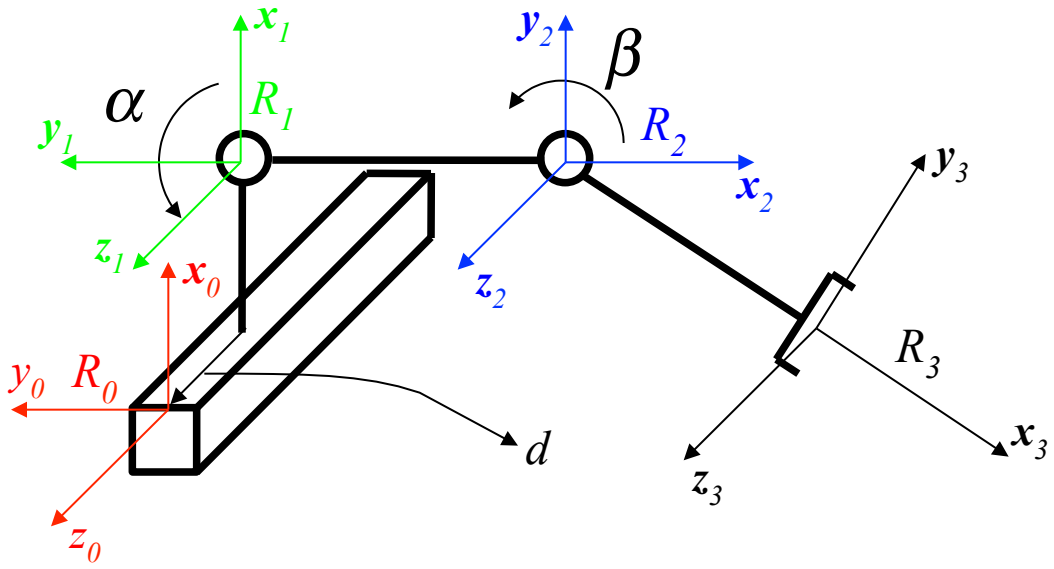
3. Modèle géométrique inverse

3.1. Définitions

- **Modèle géométrique inverse (MGI)**
  - Soit G_i une fonction telle que : $\boldsymbol{q} = G_i(\boldsymbol{p})$
  - La fonction G_i est appelée modèle géométrique inverse du robot.
- Remarques :
  - G_i dépend de la décomposition de la rotation.
  - Il existe souvent plusieurs solutions $\boldsymbol{q}$ pour une attitude $\boldsymbol{p}$ donnée de l'organe terminal.
  - G_i est définie uniquement à l'intérieur de l'espace de travail dextre du robot.
  - Il y a des points singuliers à l'intérieur de l'espace de travail du robot où G_i admet une infinité de solutions.

3. Modèle géométrique inverse

3.2. Exemple 1 : robot plan

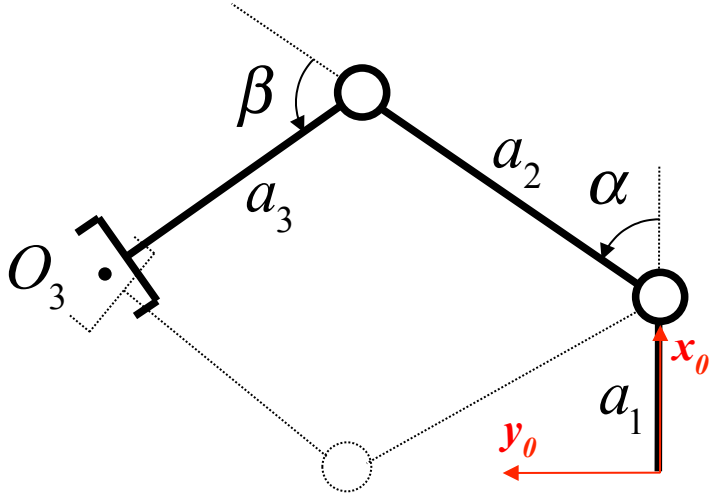


- Problème :
  - Soit $\boldsymbol{p}=[T_x\ T_y\ T_z]^{\mathrm{T}}$ les coordonnées de O_3 dans R_0
  - Trouver G_i telle que $\boldsymbol{q}=G_i(\boldsymbol{p})$ avec $\boldsymbol{q}=[d\ \alpha\ \beta]^{\mathrm{T}}$

3. Modèle géométrique inverse

3.2. Exemple 1 : robot plan

- Relation évidente :
- Le reste peut être traité dans un plan :



- On a :

3. Modèle géométrique inverse
3.2. Exemple 1 : robot plan

- De plus :

- En additionnant ces équations :

- En utilisant : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- On obtient :
- D'où :

3. Modèle géométrique inverse

3.2. Exemple 1 : robot plan

- On en déduit que : $\beta = \pm \arccos(D) \text{ si } |D| \leq 1$
- En choisissant le signe, on détermine la configuration du coude.
- Pour obtenir α on écrit que :

$$\begin{cases} T_x - a_1 = k_1 \cos\alpha - k_2 \sin\alpha \\ T_y = k_1 \sin\alpha + k_2 \cos\alpha \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} k_1 = a_2 + a_3 \cos\beta \\ k_2 = a_3 \sin\beta \end{cases}$$

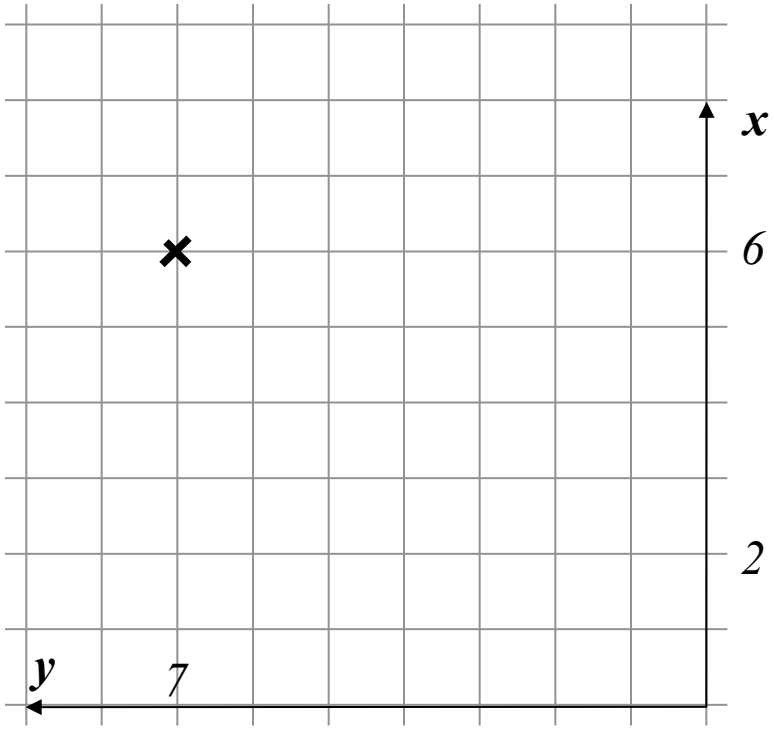
- On résout le système et on obtient :

$$\sin\alpha = \frac{k_1 T_y - k_2 (T_x - a_1)}{k_1^2 + k_2^2} \qquad \cos\alpha = \frac{k_2 T_y + k_1 (T_x - a_1)}{k_1^2 + k_2^2}$$

3. Modèle géométrique inverse

3.2. Exemple 1 : robot plan

- Finalement : $\alpha = \arctan 2\left(k_1 T_y - k_2 (T_x - a_1)\,,\, k_2 T_y + k_1 (T_x - a_1)\right)$
- A. N. :
  - $a_1 = 2\,,\ a_2 = 4\sqrt{2}\,,\ a_3 = 3\,,\ T_x = 6\,,\ T_y = 7$

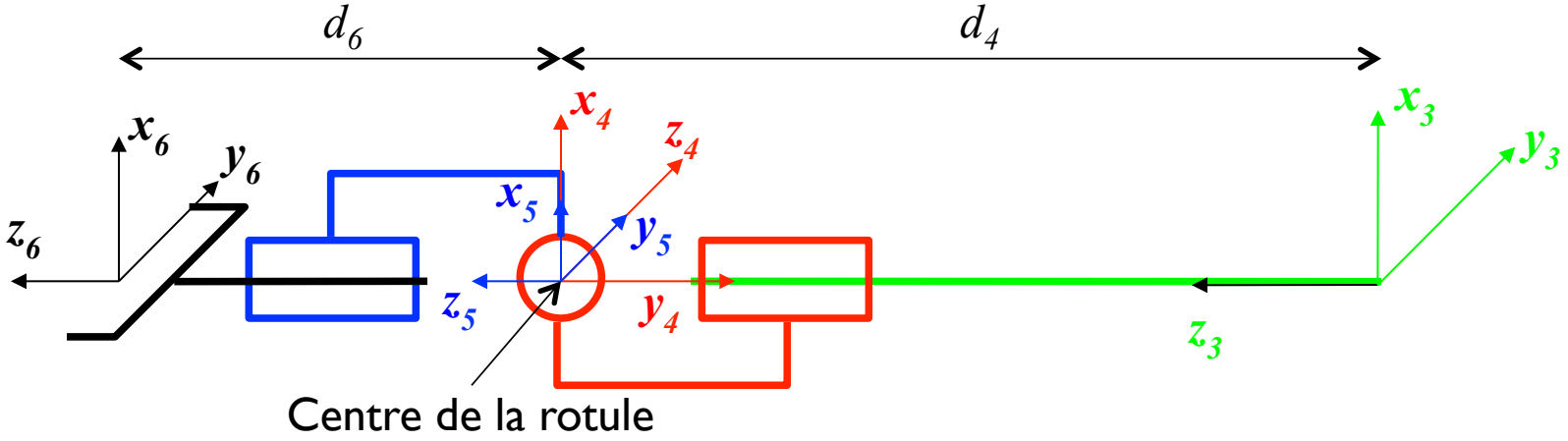


3. Modèle géométrique inverse
3.3. Exemple 2 : 6 axes anthropomorphe

- Le calcul du MGI d'un 6R anthropomorphe se fait en 2 étapes :
  1. Trouver $q_1\ q_2\ q_3$, les 3 premières coordonnées articulaires, telles que le centre de la rotule coïncide avec la position désirée
  2. Trouver $q_4\ q_5\ q_6$, les angles du poignet, de manière à avoir la bonne orientation de la pince.
- Cette décomposition est possible, car les angles du poignet n'influencent pas la position du centre de la rotule.

3. Modèle géométrique inverse

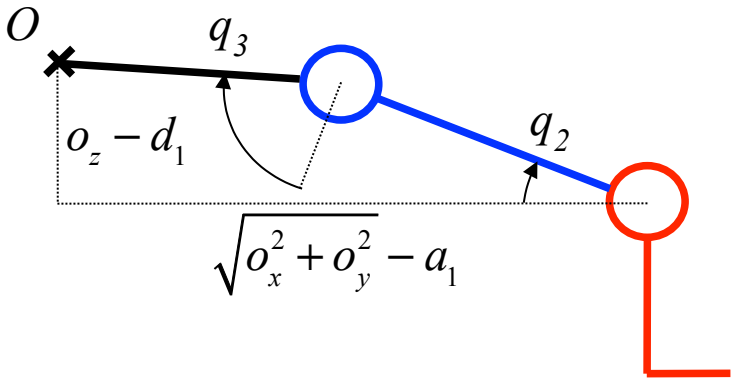
3.3. Exemple 2 : 6 axes anthropomorphe

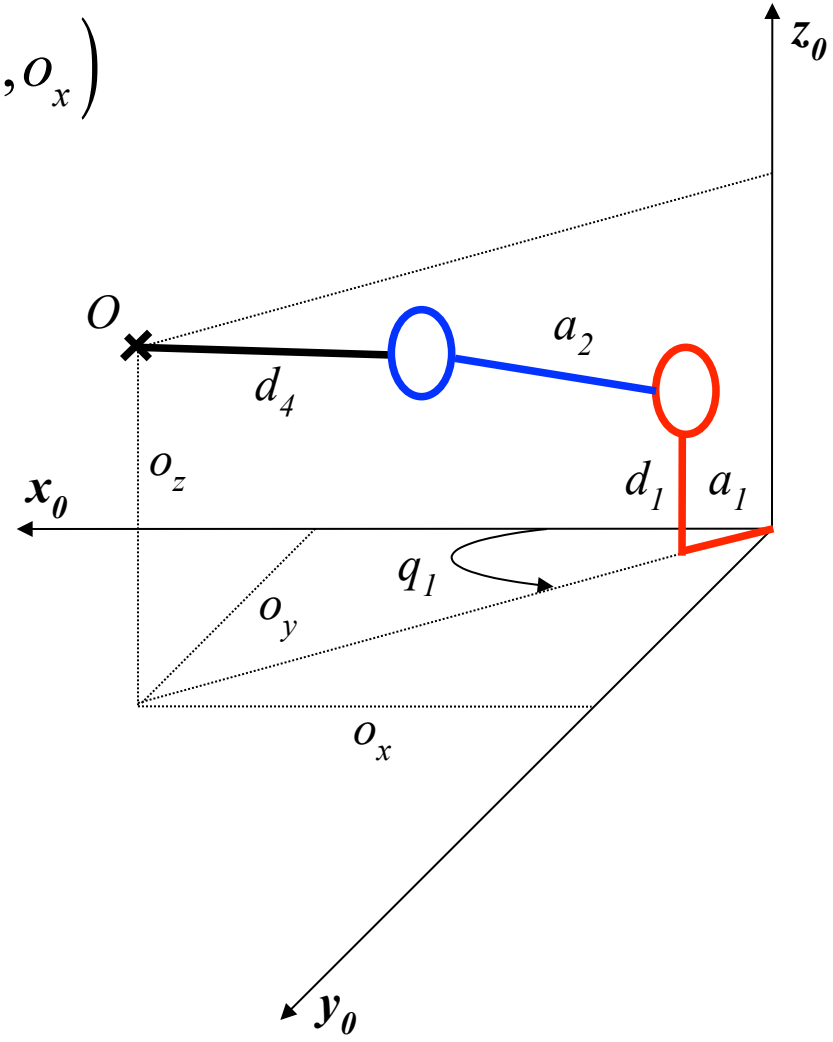


- On a : ${}^6O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d_6 & 1 \end{bmatrix}^T$
- D'où : ${}^0O = \underbrace{M_{06}}_{\text{Connu}} {}^6O = \begin{bmatrix} o_x & o_y & o_z & 1 \end{bmatrix}^T$
- Etape 1 :
  - Trouver $q_1\ q_2\ q_3$ tels que le centre de la rotule ait pour coordonnées $[o_x\ o_y\ o_z]^T$ dans R_0 .

3. Modèle géométrique inverse
3.3. Exemple 2 : 6 axes anthropomorphe

- On a : $q_1 = \arctan 2\left(o_y, o_x\right)$
- Le problème est alors ramené dans le plan :





3. Modèle géométrique inverse
3.3. Exemple 2 : 6 axes anthropomorphe

- D'après 3.2 :

$$D = \frac{(o_z - d_1)^2 + \left(\sqrt{o_x^2 + o_y^2} - a_1\right)^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2 d_4}$$

$$\Rightarrow q_3 = \pm \arcsin(D) \text{ si } |D| \leq 1$$

$$\Rightarrow q_2 = \arctan 2\left(k_1(o_z - d_1) - k_2\left(\sqrt{o_x^2 + o_y^2} - a_1\right), k_2(o_z - d_1) + k_1\left(\sqrt{o_x^2 + o_y^2} - a_1\right)\right)$$

avec : $k_1 = a_2 + d_4 \sin(q_3)$ et $k_2 = d_4 \cos(q_3)$

- Remarques :
  - q_1 est unique si $(o_x\ o_y) \neq (0\ 0)$ (si le point O n'est pas sur le premier axe). Sinon, infinité de solutions.
  - q_2 et q_3 existent si $|D| \leq 1$ (position atteignable).

3. Modèle géométrique inverse
3.3. Exemple 2 : 6 axes anthropomorphe

- Etape 2 :
  - On connaît M_{03} (Etape 1) et M_{06} (Hypothèses).
  - On en déduit : $M_{36} = M_{03}^{-1} M_{06}$
  - Soit :

$$M_{36} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Qu'on identifie à (*cf* 2.5 exemple 3) :

$$M_{36} = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_4 + d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Modèle géométrique inverse

3.3. Exemple 2 : 6 axes anthropomorphe

- Si $q_5 \neq 0\ [\pi]$:

$$\begin{cases} q_5 = \pm \arccos(r_{33}) \\ q_4 = \arctan 2(-r_{23}, -r_{13}) \\ q_6 = \arctan 3(r_{32}, -r_{31}) \end{cases}$$

- Si $q_5 = 0\ [\pi]$:

$$\begin{cases} q_4 = 0 \\ q_6 = \arctan 2(r_{12}, r_{22}) \end{cases}$$

3. Modèle géométrique inverse
3.3. Exemple 2 : 6 axes anthropomorphe

- **Remarques**
  - Dans le cas général, il y a 2 solutions pour le triplet $\{q_1\ q_2\ q_3\}$ (coude en haut ou en bas).
  - Dans le cas général, il y a 2 solutions pour le triplet $\{q_4\ q_5\ q_6\}$ (2 valeurs possibles de q_5, dans la pratique, seul une est accessible).
  - Donc dans le cas général, il y a 4 solutions au MGI de ce robot.
  - Il y a 3 cas singuliers :
    - Lorsque le point O est sur l'axe 1 (infinité de solutions).
    - Lorsque le point O est inaccessible (pas de solution).
    - Lorsque $q_5=0\ [\pi]$ (infinité de solutions).